Capítulo 5. Autovectores y autovalores.

Introducción.

Este capítulo resultará totalmente novedoso para los alumnos de primer curso (a diferencia de los anteriores, que tenían buena parte de repaso de materia ya estudiada en bachillerato).

Los términos "autovalor" y "autovector" se aplican a ciertos valores escalares y ciertos vectores en relación con un endomorfismo o una matriz cuadrada. Preguntarse por los autovectores de un endomorfismo es inquirir qué vectores peculiares no cambian su dirección al actuar sobre ellos el endomorfismo: esa rara cualidad hará de ellos una valiosa herramienta para simplificar el estudio de ese endomorfismo (o de la matriz correspondiente); representan de alguna manera una especie de "ejes naturales" o direcciones privilegiadas.

Aclaremos esto un poco más: cuando un endomorfismo $T : V \to V$ actúa sobre un vector $u \in V$ produce otro vector $v = Tu$ que, en general, apuntará en una dirección diferente a la de u (dicho en términos algebraicos: no será un múltiplo de u); cuando dé la casualidad de que Tu sea proporcional a u, diremos que u es un autovector de T. De esa categoría queda excluido el vector nulo, para el cual siempre se tiene $T0 = 0$.

Ya es hora de definir los conceptos con precisión:

Definición.- Sea V un espacio vectorial, sea $T : V \to V$ un endomorfismo de V y sea $u \in V$ un vector no nulo. Si existe un escalar λ tal que $Tu = \lambda \cdot u$, decimos que u es un *autovector* de T, y que λ es un *autovalor*. Se dice que el autovalor λ está asociado al autovector u (y viceversa). También se emplean los términos "*vector propio*" y "*valor propio*", en lugar de "autovector" y "autovalor".

Ejemplos:

$T(x, y) = (y, x)$; $(2, 2)$ es un autovector, con autovalor 1; $(1, -1)$ es otro (con autovalor asociado -1); $(2, 3)$ no es autovalor de T.

$T(x, y) = (2y, x + y)$; $(1, 1)$ es un autovector, con autovalor 2; $(2, -1)$ es otro (con autovalor asociado -1)

$T(x, y, z) = (x + y + z, 2x + 2y + 2z, 3x + 3y + 3z)$; $(1, -3, 2)$ es un autovector, con autovalor 0; $(1, 0, -1)$ y $(-2, 2, 0)$ son otros (con el mismo autovalor); $(1, 2, 3)$ también lo es (con autovalor asociado 6)

$T(A) = A^T$, definida en el espacio vectorial de las matrices 2×2. Las matrices A_{11} y A_{22} de la base canónica son autovectores asociados al autovalor 1, la matriz A_{12} no es autovector, pero sí lo son $A_{12} + A_{21}$ y $A_{12} - A_{21}$ (encuentre los autovalores asociados).

$T : \mathbf{R}_1[X] \to \mathbf{R}_1[X]$, $T(p) = p + p'$ tiene el autovalor 1 (asociado a los polinomios constantes) y nada más.

En dimensión infinita también hay ejemplos interesantes (sobre todo para la rama del Análisis Matemático; en esta asignatura nos ceñiremos a la dimensión finita):

$D(f) = f'$ define un endomorfismo en el espacio vectorial $C^\infty(\mathbf{R})$. La función exponencial es un autovector ("autofunción" solemos decir) asociada al autovalor 1. Las funciones constantes son autofunciones asociadas al 0. En realidad cualquier número real λ es autovalor (con autofunciones asociadas $exp(\lambda x)$). En dimensión finita no puede darse el caso de que haya una infinidad de autovalores, como veremos.

La misma fórmula $D(f) = f'$ define un endomorfismo en el espacio de los polinomios $\mathbf{R}[X]$, que tiene a los polinomios constantes por autovectores (con autovalor 0), y no hay más.

En dimensión finita, los endomorfismos suelen estudiarse con ayuda de las matrices, por lo que definimos:

<u>Definición</u>.- Sea A una matriz cuadrada $n \times n$ y sea u un vector columna no nulo de $\mathbf{R}^n$. Si existe un escalar λ tal que $A \cdot u = \lambda \cdot u$, decimos que u es un *autovector* de la matriz A, y que λ es un *autovalor* (asociado al autovector u).

El paralelismo entre los conceptos relativos a endomorfismos y a matrices es total en espacios de dimensión finita, pues se tiene:

<u>Proposición</u>.- Sea V un espacio vectorial, sea $T : V \to V$ un endomorfismo de V, sea B una base de V, sea A la matriz de T en la base B y sea u un vector cualquiera de V. Si u es un autovector de T (asociado a un autovalor λ), entonces u_B es un autovector de la matriz A (asociado al mismo autovalor, λ), y recíprocamente.

La demostración es inmediata.

Por ello, podemos estudiar autovectores (y autovalores) de endomorfismos mirando su matriz en alguna base, y eso es lo que haremos.

¿Cómo podemos encontrar los autovectores y los autovalores de una matriz cuadrada, A?

Para ello, hemos de plantearnos la ecuación $A \cdot u = \lambda \cdot u$, que involucra dos incógnitas: el escalar λ y el vector u (no nos interesa la solución trivial $u = 0$).

Si conociésemos un autovector, u, sería pan comido hallar el autovalor asociado: bastaría realizar el producto $A.u$ y compararlo con u. Igualmente, si conociéramos un autovalor, λ, nos tendríamos dificultad en dar con sus autovectores correspondientes: todo lo que tendríamos que hacer es resolver el sistema de ecuaciones lineales $(A - \lambda I) \cdot u = 0$ (la existencia de soluciones no triviales viene garantizada por ser λ un autovalor de A).

La cuestión es por dónde empezar. Enseguida se ve que lo más sencillo es buscar primero los autovalores y después los autovectores, ya que aquellos se pueden calcular sin necesidad de conocer estos. La clave es la siguiente:

<u>Proposición</u>.- Una condición necesaria y suficiente para que λ sea autovalor de A es que el determinante $|A - \lambda I|$ sea 0.

<u>Demostración</u>: λ es autovalor de A sii

existe $u \neq 0$ tal que $A \cdot u = \lambda \cdot u$ sii

existe $u \neq 0$ tal que $(A - \lambda I) \cdot u = 0$ sii

el sistema $(A - \lambda I) \cdot u = 0$ tiene soluciones no triviales sii

la matriz $(A - \lambda I)$ es singular,

lo que equivale a que su determinante sea nulo.

Resulta así que los autovalores de A son precisamente las soluciones de la ecuación $|A - \lambda I| = 0$. Hay que destacar que ésa es una ecuación polinómica, puesto que $|A - \lambda I|$ es un polinomio en λ de grado n (siendo A una matriz $n \times n$), que recibe el nombre de *polinomio característico* *de la matriz A*. Ahí tenemos un hecho notable, que nos permite tratar los autovalores de una matriz cuadrada sin referencia alguna a los autovectores. Anotémoslo: *los autovalores de una matriz son las raíces de su polinomio característico*.

Ejemplos:

1.- El polinomio característico de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

es $p(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda - 5$, cuyas raíces son 5 y -1; esos son los autovalores de A.

2.- La matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

tiene por polinomio característico $p(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 9$, cuya única raíz es $\lambda = 3$ (doble). Decimos que 3 es un autovalor doble de A.

3.- A la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

le corresponde el polinomio $p(\lambda) = \lambda^2 + 1$, que no tiene raíces en $\mathbf{R}$ (aunque sí en $\mathbf{C}$): A no tiene autovalores. Este ejemplo ilustra la ventaja del cuerpo de los números complejos frente al de los reales cuando se trata de estudiar una matriz o una transformación atendiendo a sus valores y vectores propios. Por ello, cuando es necesario, se introducen valores complejos en el estudio de problemas reales que aparentemente no requerirían de esa clase de números.

4.- El polinomio característico de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

es $p(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda^2$, que tiene una raíz simple ($\lambda = 3$) y otra doble ($\lambda = 0$), por lo que A tiene un autovalor simple (3) y otro doble (0).

5.- La matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

tiene el autovalor triple ($\lambda = 2$).

Observaciones:

1) Los coeficientes del polinomio característico de A, $p(\lambda) = a_0 + a_1 \cdot \lambda + \ldots + a_n \cdot \lambda_n$, se pueden leer directamente en la matriz. Los más destacados son $a_n = (-1)^n, a_{n-1} = (-1)^{n-1} \cdot tr(A), a_0 = |A|$ (se llama *traza* de A a la suma de los términos de su diagonal principal).

2) Algunos libros escriben $|\lambda I - A|$ en lugar de $|A - \lambda I|$, lo cual no tiene más repercusión que un cambio de signo en el polinomio, si n es impar (y ningún cambio en absoluto si n es par).

3) ¿Por qué llamamos λ a la variable, y no usamos x, como es normal al escribir polinomios? Supongo que por costumbre. De todos modos, no tiene ninguna importancia la letra que se use para designar la variable de un polinomio.

4) Una matriz $n \times n$ puede tener n autovalores como mucho, puesto que un polinomio no puede tener más raíces que las que indica su grado. Si tenemos en cuenta los autovalores imaginarios y contamos cada autovalor de acuerdo con su multiplicidad, entonces una matriz $n \times n$ tiene exactamente n autovalores, ya que un polinomio de grado n tiene n raíces reales o imaginarias, contadas de acuerdo a su multiplicidad. Este resultado se conoce como *Teorema Fundamental del Álgebra* y se demuestra en cursos superiores de Análisis.

Una vez calculados los autovalores de la matriz A, resolviendo la ecuación característica $|A - \lambda I| = 0$, nos queda la segunda tarea: encontrar los autovectores. Esa labor es fácil, y la describimos a continuación:

Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ los distintos autovalores de A. Con cada uno de ellos hacemos lo siguiente: el sistema $(A - \lambda_j I) \cdot u = 0$ tiene soluciones no triviales, puesto que la matriz $(A - \lambda_j I)$ es singular; esas soluciones no triviales son los autovectores asociados al autovalor λ_j. Nótese que las soluciones de ese sistema forman un subespacio vectorial de $\mathbf{R}^n$ que recibe el nombre de *autoespacio asociado al autovalor* λ_j. Su dimensión es igual a $n - rg(A - \lambda_j I)$, y a veces se le llama *multiplicidad geométrica del autovalor*.

Haciendo lo mismo con todos los autovalores, obtenemos todos los autovectores de A.

Ejemplo.- La matriz

$$\begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 \\ 0,4 & 0,8 \end{pmatrix}$$

tiene dos autovalores: $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 0,4$. Los autovectores asociados al primero son $u_1 = (1,2)$ y sus múltiplos; los autovectores asociados al segundo son $u_2 = (1,-1)$ y sus múltiplos.

Diagonalización de endomorfismos y matrices.

Si se preguntan para qué sirve conocer los autovalores de una matriz (o de un endomorfismo), podemos responder que, de momento, para expresarlos en la forma más sencilla posible (y así facilitar los cálculos). Además, eso resultará muy útil para calcular potencias de matrices, para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales y para otros menesteres que rebasan el nivel de este curso. Vamos a comenzar por lo inmediato.

Definición.- Diagonalizar un endomorfismo $T : V \to V$ es encontrar una base de V en la cual la matriz de T sea una matriz diagonal, es decir, una base formada por autovectores de T.

Diagonalizar una matriz cuadrada A es dar una matriz regular P tal que $P^{-1} \cdot A \cdot P$ sea una matriz diagonal.

Nótese que si A es la matriz de T en una base B, y $P = (B : C)$ es la matriz de paso de una nueva base C a la base B, entonces $P^{-1} \cdot A \cdot P$ es la matriz de T en la base C. Por eso, diagonalizar la matriz A equivale a diagonalizar el endomorfismo T: si la base C está formada por autovectores de T, la matriz $P^{-1} \cdot A \cdot P$ será diagonal.

Observación.- No siempre es posible diagonalizar un endomorfismo, o una matriz. Ya hemos visto un par de ejemplos, que recordamos:

La matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

no es diagonalizable, porque no tiene autovalores ni autovectores. Sí sería diagonalizable si trabajásemos con números complejos, en lugar de números reales.

La matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

no es diagonalizable por una razón distinta: su único autovalor, 3, tiene asociado el autovector $(1, -1)$ y nada más (salvo sus múltiplos), por lo que no podemos encontrar una base de $\mathbf{R}^2$ formada por autovectores de A. A veces se lee que "la multiplicidad geométrica del autovalor es menor que su multiplicidad algebraica", para indicar que no hay suficientes autovectores para formar una base del espacio.

Se comprende que la clave para la diagonalización está en encontrar suficientes autovectores linealmente independientes.

Afortunadamente, hay ciertos casos (frecuentes e importantes) en que podemos garantizar la existencia de una base de autovectores.

<u>Teorema</u>.- Autovectores asociados a autovalores distintos son linealmente independientes.

<u>Demostración</u>: Veámoslo en el caso de dos autovalores. Sean u y v dos autovectores de un endomorfismo T, asociados a los autovalores diferentes α y β, es decir $Tu = \alpha \cdot u$, $Tv = \beta \cdot v$. Para ver que u y v son linealmente independientes, partimos de una cl $\lambda \cdot u + \mu \cdot v = 0$ y hacemos con ella dos operaciones; en primer lugar, aplicamos T, y obtenemos $\lambda \cdot Tu + \mu \cdot Tv = 0$, o sea $\lambda \cdot \alpha \cdot u + \mu \cdot \beta \cdot v = 0$; en segundo lugar, la multiplicamos por α, y resulta $\lambda \cdot \alpha \cdot u + \mu \cdot \alpha \cdot v = 0$. Restando ahora las dos ecuaciones tenemos $\mu \cdot (\beta - \alpha) \cdot v = 0$, de donde $\mu = 0$, al ser $v \neq 0$ y $\alpha \neq \beta$. Por la misma razón, $\lambda = 0$, y los vectores u y v son linealmente independientes.

El alumno puede comprobar, como ejercicio, el caso de tres vectores. La demostración completa (que omitiremos) se hace por inducción.

<u>Corolario</u>.- Si el polinomio característico del endomorfismo T (o de la matriz A) tiene las n raíces simples, entonces T (o A) es diagonalizable.

<u>Demostración</u>: Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ son los autovalores, serán todos distintos (eso significa que sean simples). Tomamos autovectores $u_1, \ldots, u_n$ asociados respectivamente a $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ y ya tenemos la base de autovectores.

<u>Observación</u>.- Cuando hay autovalores múltiples, se abre la puerta a la posibilidad de que la matriz no sea diagonalizable. Pero aún podría serlo, como ocurre con la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

que tiene el autovalor doble 0. Quede como ejercicio encontrar una base de autovectores de esa matriz.

Aún queda un resultado positivo de interés:

Teorema.- Si la matriz A es simétrica, entonces es diagonalizable.

No lo demostraremos. En realidad, el resultado se puede afinar más, y la matriz de paso P puede elegirse de froma que $P.P^T = I$ (lo que se llama una "matriz ortogonal"), pero ya nos estamos yendo demasiado lejos.

Ejercicio.- Compruébese para las matrices 2×2 del tipo

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Cuando una matriz no puede diagonalizarse por tener algún autovalor imaginario, podemos conseguirlo usando números complejos. Así la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

es semejante a la matriz

$$D = \begin{pmatrix} i & 0 \\ o & -i \end{pmatrix}$$

siendo la matriz de paso,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$$

Compruebe que $P^{-1} \cdot A \cdot P = D$, o mejor, que $A \cdot P = P \cdot D$

He ahí una buena razón para estudiar espacios vectoriales complejos en lugar de espacios vectoriales reales: el cuerpo de los números complejos es algebraicamente cerrado (lo que significa que todos los polinomios no constantes con coeficientes complejos tienen alguna raíz compleja), lo que nos garantiza que no nos van a faltar autovalores; ésa no será nunca la causa por la que una matriz no se pueda diagonalizar. De todos modos, seguiremos el curso considerando escalares reales, aunque el alumno que lo desee puede hacer automáticamente el cambio a los complejos. (Nota: Paul Halmos, en su célebre "Finite dimensional vector spaces", empieza considerando escalares que pueden ser tanto reales como complejos y en un momento dado se pasa con armas y bagajes a los complejos precisamente por esta razón; en concreto, para poder demostrar que todo endomorfismo se puede representar por una matriz triangular - lo que exige disponer de un autovalor).

Cuando el obstáculo para la diagonalización es del segundo tipo, escasez de autovectores debida a algún autovalor repetido, no podemos salir del paso ampliando el cuerpo de los escalares, y la matriz A es genuinamente no diagonalizable. En ese caso, la forma más sencilla a la que se puede reducir A por semejanza es a una matriz "casi diagonal", que tiene ceros por debajo de la diagonal (luego es una matriz triangular) y por encima puede tener algún 1. Esta matriz se llama *matriz de Jordan*. El estudio de la reducción de matrices a su forma de Jordan rebasa los objetivos de este curso. Veamos sólo un ejemplo:

La matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

no es diagonalizable; su forma de Jordan será

$$J = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

La matriz de paso, P, tiene por columnas dos vectores de $\mathbf{R}^2$, u y v, tales que $A \cdot u = 3u$, $A \cdot v = u + 3v$, es decir $(A - 3I)u = 0$, $(A - 3I)v = u$: u es un autovalor de A y v no lo es, pero está ligado a u (es lo que se llama un “autovector generalizado”). Si tomamos, por ejemplo, $v = (0, 1)^T$, nos da para u el valor $u = (A - 3I) \cdot v = (-1, 1)^T$. La matriz de paso será

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Comprobar que $P^{-1} \cdot A \cdot P = J$, o que $A \cdot P = P \cdot J$, es un ejercicio rutinario.

El manejo de los autovectores y autovalores será de gran utilidad cuando haya que resolver sistemas de ecuaciones diferenciales lineales.

Vamos a ver ahora cómo calcular potencias de matrices con ayuda de los valores y vectores propios. Tomemos como ejemplo la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Sus potencias sucesivas se calculan con más o menos facilidad:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$$

Pero, ¿qué matriz será A^{75} (o más modestamente A^{11})?

La tarea se facilita enormemente si diagonalizamos A. Un cálculo sencillo nos da $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$ con

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

De ahí se sigue que $A^2 = (P \cdot D \cdot P^{-1}) \cdot (P \cdot D \cdot P^{-1}) = P \cdot D^2 \cdot P^{-1}$, y también $A^3 = P \cdot D^3 \cdot P^{-1}$, $\ldots$, $A^{75} = P \cdot D^{75} \cdot P^{-1}$

La gracia está en que las potencias de D son inmediatas

$$D^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-2)^k \end{pmatrix}$$

(¡ahí está la fuerza de ser D una matriz diagonal!), y de ahí resulta que las potencias de A se calculan fácilmente haciendo $A^k = P \cdot D^k \cdot P^{-1}$ y en particular

$$A^{11} = \begin{pmatrix} -682 & 683 \\ 1366 & -1365 \end{pmatrix}$$

Pruebe a hacerlo directamente y compruebe lo tedioso que resulta y lo fácil que es cometer errores.

Ejemplo.- Cada año un dos por ciento de la población rural emigra a la ciudad y un uno por mil de la población urbana emigra al campo. Si en el año 1830 había 6 millones de habitantes en las ciudades y 18 millones en el campo, ¿cuál sería la distribución de la población un siglo después? ¿y a muy largo plazo?

Si escribimos x_n e y_n para denotar las poblaciones urbana y rural respectivamente al cabo de n años, las condiciones del enunciado se traducen por:

$x_{n+1} = 0'999 \cdot x_n + 0'02 \cdot y_n$, $y_{n+1} = 0'001 \cdot x_n + 0'98 \cdot y_n$, $x_0 = 6$, $y_0 = 18$, lo que en notación matricial se escribe así:

$u_{n+1} = A \cdot u_n$, $u_0 = (6, 18)^T$ siendo u_n el vector $(x_n, y_n)^T$ y A la matriz

$$\begin{pmatrix} 0'999 & 0'02 \\ 0'001 & 0'98 \end{pmatrix}$$

que llamamos *matriz de transición*, porque representa el paso de un estado al siguiente.

Se comprende que la situación al cabo de dos años está descrita por el vector $u_2 = A^2 \cdot u_0$, y al cabo de un siglo, por el vector $u_{100} = A^{100} \cdot u_0$. Ahora bien, el cálculo de la potencia A^{100} es muy complicado si no tenemos antes la prudencia de diagonalizar la matriz A. Haciéndolo, tenemos: $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$ siendo las matrices involucradas

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0'979 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 20 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/21 & 1/21 \\ -1/21 & 20/21 \end{pmatrix}$$

Así, la matriz A^{100} es igual al producto $P \cdot D^{100} \cdot P^{-1}$, donde

$$D^{100} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0'979^{100} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0'12 \end{pmatrix}$$

y por tanto

$$A^{100} = \begin{pmatrix} 0'96 & 0'84 \\ 0'04 & 0'16 \end{pmatrix}$$

y la población al cabo de un siglo se distribuirá aproximadamente así: $A^{100} \cdot u_0 = (20'88, 3'12)^T$ lo que indica que al final de ese periodo en el campo quedarán poco más de tres millones de habitantes, y en la ciudad estarán los casi veintiún millones restantes.

A un plazo muy largo, las potencias de A se aproximan a $A^\infty = P \cdot D^\infty \cdot P^{-1}$ siendo

$$D^\infty = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

lo que nos deja el valor límite

$$A^\infty = \begin{pmatrix} 20/21 & 20/21 \\ 1/21 & 1/21 \end{pmatrix}$$

y la distribución final es $A^\infty \cdot u_0 = 8/7 \cdot (20,1)^T$ lo que indica que la población tiende a distribuirse en cantidades proporcionales a las indicadas por el autovector $(20,1)$ asociado al autovalor dominante 1.

Nota.- El ejemplo no debe tomarse demasiado en serio en términos sociológicos. Aparte de no haber tenido en cuenta nacimientos ni defunciones, es de creer que a lo largo de plazos prolongados las pautas migratorias se modifiquen.

Ejemplo.- La transformación definida en el plano $\mathbf{R}^2$ por $f(x,y) = (\frac{3x+y}{4}, \frac{x+3y}{4})$ lleva el vector $(11,-5)$ al $(7,-1)$; si se la aplicamos de nuevo al vector resultante nos da el $(5,1)$. ¿Qué sucede si se la aplicamos muchas veces? ¿y si lo hacemos con un vector arbitrario, (x,y)?

Expresada en la base canónica, la matriz de f es $\begin{pmatrix} 0'75 & 0'25 \\ 0'25 & 0'75 \end{pmatrix}$, donde no vemos la esencia de lo que pasa. Si calculamos los autovectores, encontramos $u=(1,1)$ y $v=(1,-1)$, asociados a los autovalores 1 y -1. En la base $\{u,v\}$, la matriz de f es $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0'5 \end{pmatrix}$, donde se lee claramente que f mantiene la componente que cada vector tiene en la dirección de u y reduce a la mitad su componente en la dirección de v. Así, al aplicar muchas veces f, la parte del vector en la dirección de v se hace muy pequeña y sólo queda la parte en la dirección de u, o sea, la proyección sobre la recta $x=y$ paralelamente a la otra recta $x+y=0$. En el caso del vector $(11,-5)$, esa proyección es $(3,3)$, y en el de un vector cualquiera (x,y) será $(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2})$.

Si preferimos escribirlo en términos de las matrices, la matriz de paso es $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ y para calcular A^n hacemos $P \cdot D^n \cdot P^{-1}$, lo que con $n=\infty$ nos da el resultado anterior.

Ejemplo.- Cierta sustancia se presenta en tres estados, A, B y C, que se transforman uno en otro en ciertas proporciones. Cada minuto, un diez por ciento de A se transforma en B y otro diez por ciento en C; un diez por ciento de B se transforma en A y un veinte por ciento en C, y finalmente un diez por ciento de C se transforma en A y un veinte por ciento en B. Estudie la evolución a lo largo del tiempo y qué sucede al cabo de muchas horas.

La matriz de transición es

$$\begin{pmatrix} 0'8 & 0'1 & 0'1 \\ 0'1 & 0'7 & 0'2 \\ 0'1 & 0'2 & 0'7 \end{pmatrix}$$

La forma diagonal es

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0'7 & 0 \\ 0 & 0 & 0'5 \end{pmatrix}$$

con matriz de paso

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

y el límite de $A^n \cdot u_0$ es un múltiplo del vector $(1, 1, 1)^T$, lo que indica que a largo plazo hay la misma cantidad de cada una de las tres especies, A, B y C.

El teorema de Cayley-Hamilton

Este célebre teorema dice así:

Teorema.- Toda matriz cuadrada es raíz de su polinomio característico.

El enunciado es conciso, pero quizá poco claro; ¿qué significa eso de que "es raíz de su polinomio característico"?. Lo explicaré con un ejemplo, antes de precisarlo en general.

El polinomio característico de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

es $p(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda - 5$. Decimos que 5 es raíz de $p(\lambda)$ porque al sustituir 5 en el lugar de λ obtenemos $p(5) = 0$, y por lo mismo decimos que -1 es otra raíz de $p(\lambda)$, y que 3 no lo es. No hay duda de qué queremos decir cuando hablamos de sustituir λ por un número, como 5, y no nos perturba leer $p(5)$, pero, ¿qué es (o qué podría ser) $p(A)$? Calcular A^2 y restarle $4 \cdot A$ tiene sentido, pero no lo tiene restarle luego el número 5. ¿Qué interpretación le daremos?

La respuesta es sencilla: en lugar de restar el número 5, restamos la matriz $5 \cdot I$. Así tienen sentido las operaciones con matrices $A^2 - 4A - 5I$, y a esa matriz es a la que llamamos $p(A)$.

Nótese que en este ejemplo concreto, A^2 es igual a

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 16 \\ 8 & 17 \end{pmatrix}$$

por lo que $A^2 - 4A + 5I$ es la matriz nula, como pronosticaba el teorema de Cayley-Hamilton.

En general, si $p(x)$ es un polinomio, pongamos $a_0 + a_1 \cdot x + \ldots a_n \cdot x^n$, y A es una matriz cuadrada $m \times m$, entonces $p(A)$ es la matriz $m \times m$ que resulta al hacer $a_0 \cdot I + a_1 \cdot A + \ldots a_n \cdot A^n$.

Decimos que A es raíz del polinomio p cuando la matriz $p(A)$ es la matriz nula.

Ahora se comprende el enunciado del teorema de Cayley-Hamilton. La demostración se puede encontrar en multitud de libros. Aquí no se verá.

Nota.- A veces se lee esta formulación del teorema: "todo endomorfismo (de un ev de dimensión finita) es raíz de su polinomio característico". Como se comprende fácilmente, ambas versiones del teorema son equivalentes, por la relación que hay entre endomorfismos y matrices cuadradas.

Este teorema es útil para calcular cómodamente potencias de una matriz, así como su inversa (si la tiene). Por ejemplo, si queremos calcular el cuadrado, el cubo y la inversa de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

podemos aprovechar que su polinomio característico es $x^2 - x - 2$ (o, si se prefiere, $\lambda^2 - \lambda - 2$), por lo cual el teorema de Cayley-Hamilton nos asegura que $A^2 - A - 2I$ es la matriz nula, es decir, $A^2 = A + 2I$. Así pues,

$$A^2 = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

De $A^2 = A + 2I$ obtenemos $A^3 = A^2 + 2A$ (multiplicando por A), lo que nos permite concluir que

$$A^3 = \begin{pmatrix} 11 & 12 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$$

Si se quieren calcular potencias elevadas de una matriz A, es preferible diagonalizarla (cuando sea posible). Para calcular la inversa de A, de nuevo nos fijamos en que $A^2 = A + 2I$, de donde deducimos que $A \cdot (A - I) = 2I$ y por tanto la inversa de A es $1/2(A - I)$, es decir

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1/2 & -3/2 \end{pmatrix}$$

Epílogo.- Para cerrar este capítulo, quiero enfatizar la importancia de los valores propios y los vectores propios de un endomorfismo (o de una matriz) y destacar que va mucho más allá de su utilidad para realizar ciertos cálculos. Se puede decir que los autovalores y los autovectores recogen la información sobre las características esenciales de una transformación o de un “sistema”, que a menudo se encuentran ocultos. Así, el efecto de un endomorfismo que tenga autovalores 2 y 3 es un estiramiento determinado por esos factores en las direcciones que marquen los correspondientes autovectores. A largo plazo, el efecto debido al factor mayor (en este ejemplo, el 3) se impone sobre los demás, y la dirección del correspondiente autovector define el “eje” en el que se produce la expansión. Las vibraciones de una estructura son una combinación de unas vibraciones básicas que se reconocen como autovectores (o autofunciones) de cierto operador: conocerlas es clave para evitar (o para provocar) fenómenos como la resonancia.

Un ejemplo elemental de una situación en que una cierta regularidad está velada y se descubre en los autovalores lo proporciona la sucesión de Fibonacci: $x_0 = 0, x_1 = 1, x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$. El cociente entre dos términos consecutivos, $\frac{x_{n+1}}{x_n}$ se aproxima al valor $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. ¿De dónde surge ese extraño número, que ni siquiera es racional, al estudiar una sucesión de números enteros? Si escribimos la relación de recurrencia en la forma $v_{n+1} = A \cdot v_n$, donde v_n es el vector columna $\begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix}$ y A es la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, y calculamos los autovalores de A, se nos revela la razón:

esos autovalores son $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$; al calcular las potencias de A (que nos darán los sucesivos términos de la sucesión de Fibonacci) estamos elevando esos autovalores a los correspondientes exponentes. El segundo autovalor es menor que 1 (en valor absoluto), por lo que sus potencias se hacen minúsculas rápidamente, y sólo queda el efecto del primer autovalor. En esencia, cada nuevo producto por A (cada nuevo término de la sucesión) corresponde a un nuevo factor $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, lo que explica que ése sea el límite de los cocientes.

Podría escribirse mucho más sobre este asunto de los autovalores y los autovectores, y traer a colación innumerables situaciones en las que es pertinente considerarlos, pero para este curso elemental bastará con lo aquí reflejado.

Ejercicios

1.- Calcule los autovalores y los autovectores de las matrices $\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Diagonalice aquellas matrices que lo permitan.

2.- De una matriz 3×3, A, sabemos que tiene los autovalores $2, 4$ y μ. Cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas:

A es regular si $\mu \neq 0$.

A es diagonalizable si μ no es ni 2 ni 4.

Si $\mu = 2$, entonces A no es diagonalizable.

Si $\mu = 0$, entonces A es singular (o sea, no es regular).

La traza de A es igual a $6 + \mu$.