Capítulo 4. Determinantes.

Introducción

El determinante de una matriz cuadrada A es un número (escrito $\det(A)$ o $|A|$) que alberga una importante información sobre ella y se puede definir mediante una serie de sumas, restas y multiplicaciones efectuadas con los elementos de la matriz.

El determinante de una matriz 1×1, $A = (a)$ es $|A| = a$; el de una matriz 2×2,

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

es $|A| = ad - bc$; el de la matriz 3×3

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

se expresa así: $a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31}$

¡Recuerde! Sólo tienen determinante las matrices cuadradas.

Antes de seguir, justifiquemos el término *determinante* considerando un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{cases} ax + by = \alpha, \\ cx + dy = \beta \end{cases}$$

Su solución se escribe en forma de dos fracciones:

$$x = \frac{\alpha d - \beta b}{ad - bc}, y = \frac{a\beta - \alpha c}{ad - bc}$$

cuyo denominador es precisamente el valor $ab - cd$ al que hemos llamado *determinante* de la matriz de los coeficientes; el que esa cantidad sea o no 0 determina el tipo de sistema: compatible determinado si no se anula, incompatible o compatible indeterminado cuando se anula. Adviértase además que los numeradores también son unos determinantes ligados al sistema.

En sistemas de tres ecuaciones, la expresión de la solución es más larga, pero también aparece un denominador que es el determinante de la matriz de los coeficientes.

Bien, ¿qué es, pues, el determinante de una matriz $n \times n$? Podríamos definirlo mediante una fórmula que involucrase un montón de productos que se suman y se restan (el total sería de $n!$ términos, cada uno el producto de n factores), pero vamos a abordarlo de una manera más elemental: fijándonos en tres propiedades muy sencillas que cumple el determinante de una matriz 2×2 y pidiendo esas mismas propiedades para el caso $n \times n$.

Definición del determinante

Queremos definir una aplicación, $det : M_n(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$ que satisfaga ciertas propiedades, tomando como modelo que

$$det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$$

cuando $n = 2$.

1^a *propiedad*.- Si en una matriz A permutamos dos columnas, obtenemos una nueva matriz, A'. El determinante de A' será igual al opuesto del determinante de A.

Para matrices 2×2, es inmediato que se cumple esta propiedad, que queremos extender a matrices cuadradas de cualquier tamaño.

Por esta propiedad, decimos que *el determinante es una aplicación alternada de las columnas de la matriz*.

Consecuencia: Si una matriz tiene dos columnas iguales, su determinante es 0. (Piense por qué: es muy sencillo).

2^a *propiedad*.- El determinante es una aplicación lineal de la primera columna de la matriz.

Eso significa que si multiplicamos la primera columna por un escalar (sin tocar las demás columnas), entonces el determinante queda multiplicado por ese escalar; y que si el vector C_1 es suma de dos vectores, entonces el determinante es la suma de los dos determinantes correspondientes. De nuevo, se comprueba fácilmente en el caso 2×2.

Consecuencia: El determinante también será función lineal de la segunda columna (y de cualquier otra).

En efecto, pasamos esa columna al primer lugar (lo cual cambia el signo del determinante), allí podemos aprovechar la linealidad y devolver luego la columna a su posición original (lo que vuelve a cambiar el signo del determinante, restaurando el que tenía inicialmente).

Por esta propiedad, decimos que *el determinante es una aplicación multilineal de las columnas de la matriz*.

La idea de "aplicación multilineal alternada" puede sonar extraña, pero seguramente ya conocen un ejemplo: el producto vectorial de dos vectores es una aplicación bilineal alternada $\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$.

Otras consecuencias: Si una columna es nula, el determinante es 0 (Razón: piense en lo que sucede al multiplicar esa columna por 2). También es 0 si una columna es múltiplo de otra. El determinante de una matriz no varía si a una columna se le suma un múltiplo de otra o una combinación lineal de otras columnas.

Por consiguiente, podemos realizar oe en las columnas de una matriz sin alterar su determinante. Esta propiedad permite transformar un determinante en otro con el mismo valor y más sencillo de calcular (por ejemplo, uno con muchos ceros).

3^a *propiedad*.- El determinante de la matriz unidad es 1.

Consecuencia: El determinante de una matriz diagonal es igual al producto de los elementos de la diagonal (la razón es inmediata). Análogamente, el determinante de una matriz triangular es igual al producto de los términos de la diagonal (porque mediante oe en las columnas podemos hacer ceros fuera de la diagonal sin alterar los valores que aparecen en ella; ese argumento falla si alguno de esos términos es nulo, pero en ese caso es fácil concluir que el determinante ha de ser también nulo, como el producto de los elementos de la diagonal).

Definición.- El determinante de una matriz cuadrada A es el número $|A|$ que le asigna la única aplicación multilineal alternada $det : M_n(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$ tal que $det(I) = 1$.

Esa definición tiene algunos pequeños inconvenientes que saltan a la vista junto con grandes ventajas ocultas. Entre los primeros, se ve rara la definición: uno esperaría algo así como una fórmula que dijera “el determinante de la matriz A es igual a tal cosa (y ahí una fórmula sobrecogedora)”; daremos una expresión así dentro de unos párrafos. Un segundo inconveniente es que no está claro que haya de existir una aplicación que satisfaga los requisitos demandados: ¿seguro que hay alguna aplicación multilineal alternada que vale 1 para la matriz I? ¿y que es única?; también lo trataremos enseguida. Entre las ventajas, una decisiva: con esa definición, el cálculo de determinantes es muy sencillo.

Para lidiar con las objeciones a la definición, traemos a colación el siguiente resultado, cuya demostración omitiremos:

Teorema (de existencia y unicidad de la aplicación determinante).- Existe una única aplicación multilineal alternada de los vectores columna que asocia a la matriz unidad el valor 1.

Fórmula para el determinante de una matriz cuadrada: Se puede demostrar que el determinante de una matriz $n \times n$ (a_{ij}) se puede definir mediante la siguiente expresión:

$$\sum \pm a_{1i_1}.a_{2i_2} \dots a_{ni_n}$$

donde los índices $i_1, i_2, \dots, i_n$ forman una permutación de los números $1, 2, \dots, n$, de suerte que en cada producto hay un término de cada fila y uno de cada columna. El signo que afecta al factor $a_{1i_1}.a_{2i_2} \dots a_{ni_n}$ es $+$ cuando la permutación $i_1, i_2, \dots, i_n$ es par (es decir, cuando hay un número par de alteraciones del orden natural de los números) y es $-$ cuando esa permutación es impar.

Otras propiedades de los determinantes:

El determinante del producto de dos matrices es igual al producto de los determinantes de los factores: $|A.B| = |A|.|B|$ No lo demostraremos.

Consecuencia: Si la matriz A es regular, el determinante de la inversa $|A^{-1}|$ es igual a $|A|^{-1}$, puesto que el producto de las matrices A y A^{-1} es igual a la matriz I, cuyo determinante es 1.

El determinate de la matriz A^T es igual al de la matriz A.

Idea de la demostración: Para matrices triangulares es obvio, puesto que el determinante es el producto de los términos de la diagonal. Si descomponemos A en la forma $L.U$, entonces

$|A| = |L|.|U|$; además $A^T = U^T.L^T$, de donde se sigue que $|A^T| = |U^T|.|L^T| = |U|.|L| = |A|$ (adviértase que $|U^T|.|L^T| = |U|.|L|$, pues cada uno de los determinantes es igual al producto de los términos de la diagonal por tratarse de matrices triangulares). En el caso general, A no se puede descomponer como $L.U$, sino que aparece una matriz de permutación: $P.A = L.U$; como $|P| = \pm 1$, se concluye fácilmente.

Consecuencia: Lo que hemos dicho de las columnas de un determinante se puede decir igualmente de sus filas: al permutar dos filas el determinante cambia de signo, al sumar a una fila un múltiplo de otra no se altera el determinante, etc.

Cuestión práctica: Cómo calcular un determinante.

Las propiedades que hemos postulado y sus consecuencias nos dan la pauta: hagamos oe con las columnas de la matriz hasta reducirla a forma triangular (alcanzado este punto, el cálculo es inmediato). Si por el camino nos ha aparecido algún pivote nulo, impidiendo hacer ceros, permutamos dos columnas (¡atención! Eso cambia el signo del determinante); si observamos dos columnas iguales, o que una es múltiplo de otra o cl de otras, podemos parar y concluir que el determinante es 0.

Ejemplos y ejercicios.- Calcule los determinantes de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & x^2 & x^3 \\ 1 & x^3 & x^5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \\ 4 & 1 & -2 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & a & b & c \\ a & a & a & b \\ a & a & a & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & y & z & t \\ x^2 & y^2 & z^2 & t^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 & t^3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{pmatrix}$$ Calcule también el producto de la última matriz por su traspuesta.

Menores y cofactores. Matriz adjunta

Un menor de una matriz es el determinante de alguna submatriz cuadrada suya (que resulte al eliminar algunas filas y columnas). Si en un determinante de una matriz $n \times n$ marcamos una posición (i, j) y tachamos esa fila y esa columna, nos queda un determinante menor (de tamaño $(n-1) \times (n-1)$); si le damos el signo $+$ cuando la suma $i + j$ es par y el signo $-$ cuando es impar, obtenemos el cofactor del elemento a_{ij}, que escribiremos A_{ij}.

Si descomponemos la i-ésima columna de la matriz A como suma de n vectores cada uno de los cuales es múltiplo de un vector de la base canónica (es decir, tiene ceros en todas las posiciones salvo en una), entonces el determinante de la matriz A se puede escribir como la suma de n determinantes (por la multilinealidad) cada uno de los cuales tiene sólo un término no nulo en la i-ésima columna, y resulta ser igual al producto del término a_{ki} por el correspondiente cofactor A_{ki}. Esa es la propiedad clave de los cofactores, que enunciamos sin demostrar:

El determinante de una matriz es igual a la suma de los productos de los elementos de una columna (o fila) por sus cofactores correspondientes:

$$|A| = a_{1i}.A_{1i} + a_{2i}.A_{2i} + \ldots + a_{ni}.A_{ni}$$

Con ayuda de esa propiedad, podemos calcular fácilmente determinantes reduciendo su cálculo al de otros de tamaños menores. De todos modos, conviene antes “hacer bastantes ceros” para así acortar el cálculo.

Ejercicio.- Calcule por ese procedimiento el determinante $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

Ejercicio.- Si multiplicamos los elementos de una columna por los cofactores de otra y sumamos, el resultado es 0. Discuta por qué.

Dada una matriz cuadrada $A = (a_{ij})$, llamamos matriz adjunta de A a la traspuesta de la matriz de sus cofactores: la posición ij la ocupa el cofactor A_{ji}. (Cuidado: algunos autores llaman matriz adjunta a la de los cofactores (sin trasponer); aquí nos atendremos a la definición que acabamos de dar, que es la que da Strang y la que aparece en las páginas de wikipedia en inglés, alemán e italiano; en las ediciones francesa y española hay confusión en el uso de los términos). Esta matriz tiene la siguiente propiedad notable: al multiplicarla por la matriz A, ya sea a la derecha, ya sea a la izquierda, el resultado es una matriz diagonal que tiene $|A|$ en todas las posiciones diagonales, es decir. es la matriz $|A|.I$. Piense a qué se debe eso.

Como consecuencia, se sigue la siguiente propiedad:

La matriz cuadrada A tiene inversa si y sólo si su determinante es distinto de 0. Demuéstrelo.

Nota.- Cuando $|A| \neq 0$, la matriz A^{-1} se puede escribir como $\frac{1}{|A|}.A^*$, siendo A^* la matriz adjunta de A. Esa fórmula es de escasa utilidad práctica, porque el cálculo de la matriz adjunta es costoso; suele ser preferible encontrar la matriz inversa mediante oe, como se vio anteriormente.

Nota.- A veces se define rango de una matriz como el orden más alto de sus menores no nulos (“el orden del mayor menor no nulo” reza la fórmula clásica - e incorrecta). Puesto que las oe en las filas y columnas de una matriz no alteran su rango, es fácil comprender que esa definición de rango equivale a la dada anteriormente, como máximo número de columnas linealmente independientes.

Vuelta a los sistemas de ecuaciones lineales

Una vez estudiadas las aplicaciones lineales y los determinantes, echamos una última ojeada a los sistemas de ecuaciones lineales para decir unas palabras sobre un tipo especial de sisitemas:

Cuando un sistema $A \cdot X = b$ tiene tantas ecuaciones como incógnitas y además la matriz A tiene rango máximo (es decir, $m = n = r$), lo llamamos *sistema de Cramer*. Su única solución se puede expresar de una forma sencilla (aunque de escasa utilidad práctica cuando el sistema tiene bastantes ecuaciones) con ayuda de los determinantes:

La primera incógnita, x_1, es igual a una fracción cuyo denominador es el determinante de A, y cuyo numerador es el determinante de la matriz que resulta sustituyendo la primera columna de A por la columna b de los términos independientes. Análogamente, la segunda incógnita, x_2, es igual a una fracción con el mismo denominador, $|A|$, y cuyo numerador es el determinante de la matriz que resulta sustituyendo la segundaa columna de A por la columna b; y así las demás incógnitas.

Para justificar esa forma de expresar la solución, nótese que al ser A regular, podemos multiplicar por su inversa en $A \cdot X = b$ para obtener $X = A^{-1} \cdot b$. Recordando que A^{-1} se puede escribir como $\frac{1}{|A|}.A^*$, donde A^* es la matriz adjunta de A, resulta que la solución es $X = \frac{1}{|A|}.A^* \cdot b$; si nos fijamos en el primer elemento, tenemos $x_1 = \frac{1}{|A|}.(A_{11} \cdot b_1 + A_{21} \cdot b_2 + \ldots + A_{n1} \cdot b_n)$, o sea, $x_1 = \frac{A_{11} \cdot b_1 + A_{21} \cdot b_2 + \ldots + A_{n1} \cdot b_n}{|A|}$, que es exactamente lo que se dijo (en el numerador está el determinante de la matriz que resulta sustituyendo la primera columna de A por la columna b, desarrollado precisamente por esa columna).

Comentarios finales sobre los determinantes

Al abrir este capítulo, dijimos que el determinante es un número asociado a una matriz que contiene una importante información sobre ella, y en efecto el determinate se anula o no según la matriz sea regular o singular, lo que es tanto como decir que sus vectores columna (o fila) sean linealmente independientes o no lo sean. Así, los determinantes pueden servirnos para estudiar rangos (de matrices o de familias de vectores), aunque generalmente es preferible hacerlo por medio de operaciones elementales. Pero la utilidad de los determinantes va mucho más allá, y aquí quiero mencionar algunas de sus ventajas.

En primer lugar, el determinante de dos vectores en el plano sirve para expresar el área del paralelogramo (o del triángulo) que determinan, con la peculiaridad de que el resultado puede ser tanto positivo como negativo: ese signo nos parmite hablar del sentido de giro, y por tanto de una orientación en el plano. Si pensamos en el vector de posición de un punto (x, y) que se mueve hacia otro punto próximo $(x + dx, y + dy)$ (hablando de manera imprecisa), barrerá un triángulo cuya área es igual a la mitad del determinante $\begin{vmatrix} x & x+dx \\ y & y+dy \end{vmatrix}$, es decir $\frac{1}{2}(xdy - ydx)$. Por eso, se define en Cálculo superior el área encerrada por una curva cerrada mediante una integral curvilínea cuyo integrando es precisamente $\frac{1}{2}(xdy - ydx)$.

De manera análoga, el volumen de un tetraedro (o de un paralelepípedo) en el espacio se puede representar mediante un determinate 3×3. También aquí el signo nos informa acerca de si el triedro está orientado en el mismo sentido que la base canónica o en el contrario.

En la Geometría elemental, el producto vectorial de dos vectores se suele expresar mediante un determinante, lo mismo que el producto mixto de tres vectores (que representa el volumen de un paralelepípedo).

En las integrales dobles y triples, cuando se realiza un cambio de variable se ha de incluir en el cambio el determinante jacobiano (que es el determinante de la matriz que recoge las derivadas parciales), de manera análoga a cuando en las integrales simples se multiplica por la derivada del cambio de variable. Así, cuando se realiza un cambio de coordenadas cartesianas (x, y) a polares (r, t), en la integral doble no sólo hay que sustituir x por $r.cos(t)$ e y por $r.sin(t)$, sino que también hay que escribir $r.dr.dt$ en el puesto de $dx.dy$; el factor r es justamente el determinante jacobiano $\begin{vmatrix} cos(t) & -r.sin(t) \\ sin(t) & r.cos(t) \end{vmatrix}$.

En el estudio de las ecuaciones diferenciales, el wronskiano de unas funciones es un determinante que se forma con ellas y sus derivadas, y nos informa de sis on linealmente dependientes o no. Así, el wronskiano de las funciones $1, e^{2x}, e^{-x}$ es $\begin{vmatrix} 1 & e^{2x} & e^{-x} \\ 0 & 2e^{2x} & -e^{-x} \\ 0 & 4e^{2x} & e^{-x} \end{vmatrix} = 6e^x \neq 0$, lo que demuestra que las funciones son linealmente independientes.

Determinante de un endomorfismo.- Si T es un endomorfismo en un espacio vectorial de dimensión finita, podemos llamar determinante de T al determinante de la matriz de T en cualquier base. Esa definición es correcta, puesto que al cambiar de base, la matriz A pasa a ser $P^{-1} \cdot A \cdot P$, cuyo determinante es el mismo que el de A.

El determinante de un endomorfismo tiene una interpretación geométrica sencilla y significativa: representa el factor por el que las áreas de las figuras (o los volúmenes, o sus análogos en dimensión superior) se ven multiplicados al actuar la transormación T. Por fijar ideas, una transformación lineal en $\mathbf{R}^2$ tranforma el rectángulo definido por los vectores $(2,1)$ y $(-3,6)$ en otra figura, que será un paralelogramo (aunque seguramente no será un rectángulo); el área de esa figura será igual al producto de 15, que es el área del rectángulo original, por el determinante de T. Cuando T no es un epimorfismo, aplasta todo el rectángulo sobre una recta (de área nula), en concordancia con el hecho de que su determinante es 0.

En Cálculo de varias variables, se estudian funciones que no son lineales, pero tienen derivadas parciales continuas (funciones diferenciables). La diferencial en cada punto es la aplicación lineal que mejor aproxima a la función que se está analizando cerca de ese punto, y por eso su determinante (el determinante jacobiano) mide el grado de magnificación que esa función produce localmente (y ésa es la razón para introducir el jacobiano en las integrales múltiples).

Ejercicios.

1.- Complete el ejemplo anterior si T viene dada por $T(x,y) = (2x+y, x+3y)$, $T(x,y) = (x+y, x-y)$, $T(x,y) = (2x+y, 6x+3y)$.

2.- Calcule el área del tetraedro formado por los vectores $(0,1,1), (1,0,1), (1,1,0)$ y su transformado por $T(x,y,z) = (x+y+z, x+2y+2z, x+2y+3z)$, $T(x,y,z) = (x+2y+3z, x+2y, x)$, $T(x,y,z) = (2x+y+z, x+3y+z, x-2y)$.

3.- Calcule las adjuntas de las matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y compruebe que el producto de cada matriz por su adjunta es igual a $|A| \cdot I$.

4.- Calcule la inversa de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & 8 & -1 & -8 \end{pmatrix}$ de dos maneras: por operaciones elementales y mediante la matriz adjunta. Compare.