Capítulo 3. Aplicaciones lineales

Introducción

Empecemos este capítulo con un ejemplo concreto: la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

tiene la virtud de que al multiplicarla por un vector de $\mathbf{R}^3$ nos da un vector de $\mathbf{R}^2$; decimos que "transforma" cada vector del primer espacio en uno del segundo (aunque sería más correcto decir que "asocia" a cada vector de $\mathbf{R}^3$ un vector de $\mathbf{R}^2$, pero la costumbre hace que empleemos indistintamente ambos términos). Eso es lo que se llama una aplicación (o también función y transformación) de $\mathbf{R}^3$ a $\mathbf{R}^2$; sin duda los estudiantes han visto hace años aplicaciones entre conjuntos y recuerdan los términos inyectiva, suprayectiva y biyectiva (acaso convenga que los repasen). Suele emplearse la notación $f : U \to V$

El ejemplo anterior es un tipo especial de aplicación, por dos características muy destacadas: la primera es que $A \cdot (u + v) = A \cdot u + A \cdot v$, es decir, la suma de dos vectores se aplica en la suma de sus transformados (muchas aplicaciones no cumplen con esta sencilla condición, por ejemplo, $f(x, y, z) = (x \cdot y, z^2)$ es una transformación de $\mathbf{R}^3$ a $\mathbf{R}^2$ que no respeta la suma); la segunda es que $A \cdot (\lambda \cdot v) = \lambda \cdot (A \cdot v)$, lo que se puede verbalizar como que respeta el producto por escalares. Las funciones entre espacios vectoriales que gozan de esas dos propiedades reciben un nombre especial: aplicaciones lineales.

Definición.- Una *aplicación lineal* entre los espacios vectoriales U y V es una transformación $T : U \to V$ tal que $T(u + v) = T(u) + T(v)$, $T(\lambda \cdot u) = \lambda \cdot T(u)$ $\forall u, v \in U$, $\forall \lambda \in \mathbf{R}$

También se llama *transformación lineal* u *homomorfismo de espacios vectoriales*. Las dos condiciones de linealidad se pueden resumir en una sola:

$T(\lambda \cdot u + \mu \cdot v) = \lambda \cdot T(u) + \mu \cdot T(v)$

Nota.- A veces aligeraremos la escritura poniendo simplemente Tu en lugar de T(u), lo que no puede causar confusión.

Ejemplos y ejercicios. $T(x, y) = (x + y, 2x - y, y)$ es una tl de $\mathbf{R}^2$ a $\mathbf{R}^3$;

$T(x, y) = (x + y, 2x - y, 1)$ no es lineal.

$T(x, y) = (x, 0)$ es una tl de $\mathbf{R}^2$ a $\mathbf{R}^2$. Cuando los espacios U y V coinciden, como en este caso, decimos que la transformación lineal es un *endomorfismo*.

$T(p) = (p(1), p(2), p(5))$ es una tl de $\mathbf{R}$[X] a $\mathbf{R}^3$

$T(A) = A^T$ es una aplicación lineal en el ev $M_{2\times3}$ de las matrices con 2 filas y 3 columnas en el ev $M_{3\times2}$.

La conjugación es un endomorfismo en el ev $\mathbf{C}$.

Si a cada función derivable en $\mathbf{R}$, f, le asociamos su derivada, f', definimos una tl del ev de las funciones derivables en $\mathbf{R}$ al ev de todas las funciones reales de variable real (eso es otra manera de decir que la derivada de la suma es igual a la suma de las derivadas y que la derivada de una constante por una función es igual a la constante por la derivada de la función).

Si nos restringimos a funciones polinómicas, $T(p) = p'$ define un endomorfismo en el ev $\mathbf{R}[X]$.

También es lineal la transformación que a cada función continua $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ le asocia la función $Tf(x) = \int_0^x f(t)dt$.

Asociar a cada sucesión convergente su límite define una tl del espacio de esas sucesiones al espacio $\mathbf{R}$ (pues el límite de una suma es igual a la suma de los límites y el límite de una constante por una sucesión es igual al producto de esa constante por el límite de la sucesión).

Los últimos ejemplos involucran ev de dimensión infinita. Tales espacios aparecen con frecuencia en el Análisis Matemático (en las asignaturas de Cálculo). Sin olvidarnos completamente de ellos, en esta materia nos interesan particularmente los ev de dimensión finita. Si restringimos la derivación a los polinomios de grado bajo, podemos tener una tl T de $\mathbf{R}_4[X]$ a $\mathbf{R}_4[X]$, $T(p) = p'$.

<u>Cuestión</u>.- Discuta si la última transformación es sobreyectiva o no; discuta también si es inyectiva.

<u>Respuesta</u>.- No es sobreyectiva, porque el polinomio x^4 no es la derivada de ningún polinomio de $\mathbf{R}_4[X]$ (ni lo es ningún otro de grado 4). Si el espacio de llegada fuese $\mathbf{R}_3[X]$ en lugar de $\mathbf{R}_4[X]$, entonces sí se trataría de una aplicación lineal sobreyectiva. Es importante especificar los espacios de partida y de llegada de una aplicación si queremos evitar la ambigüedad. Tampoco es inyectiva, porque hay polinomios distintos con la misma derivada (por ejemplo, dos polinomios constantes).

<u>Cuestión</u>.- Discuta si las transformaciones de $\mathbf{R}_2[X]$ a $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$ definidas por las fórmulas $T_1(p) = (p(0), p'(0))$ y $T_2(p) = (p(0), p'(0), p''(0))$ son lineales o no, así como su inyectividad y sobreyectividad.

<u>Respuesta</u>.- Ambas son lineales. La primera es inyectiva, pero no sobreyectiva; la segunda es biyectiva.

<u>**Algunas palabras raras de uso frecuente**</u>: Una aplicación lineal inyectiva recibe el imponente nombre de *monomorfismo*; una sobreyectiva, el de *epimorfismo*, y una biyectiva el de *isomorfismo*. No nos dejemos impresionar por esos términos, con sus prefijos tomados del griego clásico: cada gremio tiene su jerga, y los de Álgebra Lineal no iban a ser menos. Los isomorfismos (recordemos: aplicaciones lineales biyectivas) merecen unos minutos de atención.

<u>**Proposición (primeras propiedades de las aplicaciones lineales)**</u>.-

a) Si $T : U \to V$ es lineal, entonces $T(0) = 0$ (adviértase que el primer 0 es el vector nulo de U y el segundo 0 es el vector nulo de V. Podría haberse escrito así: $T(0_U) = 0_V$)

b) Si $T : U \to V$ $L : V \to W$ son dos aplicaiones lineales entre los tres espacios vectoriales indicados, la composición $LT : U \to W$ es una aplicación lineal. *La composición de dos aplicaciones lineales es una aplicación lineal.*

c) Si $T : U \to V$ es un isomorfismo, entonces la aplicación inversa $T^{-1} : V \to U$ también es un isomorfismo.

Demostración:

a) Como $0+0=0$ y T es lineal, se deduce que $T(0)+T(0)=T(0+0)=T(0)$; como el único vector de V cuyo doble es él mismo es el vector nulo, se deduce que $T(0)=0$

b) $LT(\lambda \cdot u+\mu \cdot v)=L(\lambda \cdot T(u)+\mu \cdot T(v))=\lambda \cdot LT(u)+\mu \cdot LT(v)$

c) Comprobar que T^{-1} es un isomorfismo es sencillo, pero requiere un mínimo ingenio: para ver que $T^{-1}(u+v)=T^{-1}(u)+T^{-1}(v)$, calculamos la imagen de esta suma por T: $T(T^{-1}(u)+T^{-1}(v))=T(T^{-1}(u))+T(T^{-1}(v))=u+v$, porque T es lineal; de ahí se deduce que $T^{-1}(u+v)=T^{-1}(u)+T^{-1}(v)$ (puesto que T es inyectiva); análogamente se prueba que $T^{-1}(\lambda \cdot u)=\lambda \cdot T^{-1}(u)$.

Definición.- Cuando hay un isomorfismo entre dos espacios vectoriales, decimos que esos espacios son *isomorfos.* Dos espacios isomorfos se pueden considerar como idénticos a muchos efectos (como dos barajas españolas se pueden considerar idénticas aunque el tamaño de los naipes sea distinto, o el color del dorso, pero todo juego que podamos desarrollar con una podemos jugarlo igualmente con la otra). Nótese que la relación de isomorfía es simétrica (si U es isomorfo a V, entonces V es isomorfo a U) y transitiva (si U es isomorfo a V y V lo es a W, entonces U es isomorfo a W), en virtud de la proposición que acabamos de demostrar.

Ejemplos.- $\mathbf{C}$ es isomorfo a $\mathbf{R}^2$. Un isomorfismo obvio está definido asociando el número complejo $a+i.b$ con el par ordenado (a,b). El espacio $\mathbf{R}_2[X]$ es isomorfo a $\mathbf{R}^3$, mediante $T(a+bx+cx^2)=(a,b,c)$. La recta de ecuación $x+3y=0$ es isomorfa a $\mathbf{R}$.

Observación importante: Todos los espacios vectoriales de dimensión 2 son isomorfos a $\mathbf{R}^2$: si $\{u,v\}$ es una base de V, entonces $T(x,y)=x.u+y.v$ define una aplicación de $\mathbf{R}^2$ a V; compruebe que es lineal y biyectiva y observe en qué se necesita que los vectores u,v formen una base. De la misma manera, todos los espacios de dimensión 3 son isomorfos a $\mathbf{R}^3$, etc.

Proposición.- Si $T:U\to V$ es un isomorfismo y $\{u_1,\dots,u_n\}$ es una base de U, entonces $\{Tu_1,\dots,Tu_n\}$ es una base de V.

La demostración es muy fácil: los vectores $Tu_1,\dots,Tu_n$ son linealmente independientes por ser T inyectiva, y forman un sistema generador de V por ser T suprayectiva. Complete los detalles.

Escudriñando la demostración, se observa que en realidad se han demostrado dos propiedades cuya "suma" da como resultado la proposición anterior. Esas dos proposiciones son:

1.- Si $T:U\to V$ es un epimorfismo y $\{u_1,\dots,u_n\}$ es un sistema generador de U, entonces $\{Tu_1,\dots,Tu_n\}$ es un sistema generador de V.

2.- Si $T:U\to V$ es un monomorfismo y $u_1,\dots,u_n$ son vectores de U linealmente independientes, entonces $Tu_1,\dots,Tu_n$ son vectores de V linealmente independientes.

Así, los monomorfismos preservan la independencia lineal, los epimorfismos conservan los sistemas generadores, y los isomorfismos respetan las bases.

Corolario.- Una condición necesaria y suficiente para que dos espacios vectoriales de tipo finito sean isomorfos es que tengan la misma dimensión.

La demostración es sencilla, y consiste básicamente en poner en orden las piezas que ya tenemos. Para dimensión infinita, el resultado también es cierto, pero más difícil de demostrar.

Núcleo e imagen de una aplicación lineal.

Definición.- Si $T : U \to V$ es una aplicación lineal, entonces el conjunto de los vectores de U que se transforman en el vector nulo de V, $\{u \in U : Tu = 0\}$, se llama *núcleo de* T y se escribe Ker(T) o KerT. El conjunto de los vectores de V que son transformados de algún vector de U, $\{v \in V : \exists u \in U$ tal que $Tu = v\}$, se llama *imagen de* T y se escribe Im(T) o ImT.

Proposición.- KerT es un subespacio vectorial de U. ImT es un subespacio vectorial de V.

Demostración (parcial): Si $u, u' \in KerT$, entonces $u + u' \in KerT$ porque $T(u + v) = Tu + Tv = 0 + 0 = 0$. Si $v, v' \in ImT$, entonces $v + v' \in ImT$ porque será $v = Tu$, $v' = Tu'$ para ciertos vectores u, u'; así pues $v + v' = Tu + Tu' = T(u + u')$ es imagen del vector $u + u'$. Complete la demostración.

Observación.- También se puede demostrar fácilmente que si U_1 es un subespacio vectorial de U, entonces el conjunto $\{v \in V : \exists u \in U_1$ tal que $Tu = v\}$ formado por las imágenes de los vectores de U_1 es un subespacio vectorial de V, que se suele denotar como $T(U_1)$; y que si V_1 es un subespacio vectorial de V, entonces el conjunto $\{u \in U : Tu \in V_1\}$ formado por los vectores cuya imagen pertenece a V_1 es un subespacio vectorial de U, que se suele escribir como $T^{-1}(V_1)$. La imagen y el núcleo no son más que los casos particulares en que U_1 es todo el espacio U y V_1 es el subespacio trivial $\{0\}$, por lo que podríamos escribir T(U) en lugar de ImT, y $T^{-1}(0)$ en vez de KerT.

Proposición.- T es un monomorfismo si y sólo si KerT sólo contiene al vector nulo (escribiremos kerT$= 0$ en vez de Ker(T) $= \{0\}$). T es un epimorfismo sii ImT $=$ V.

Demostración: Si T es un monomorfismo y u es un vector del núcleo, entonces $Tu = 0$. Como $T0 = 0$, es forzoso que $u = 0$, al ser T inyectiva. Recíprocamente, si KerT $= 0$ entonces T es inyectiva, puesto que de $Tu = Tv$ se deduce que $T(u - v) = Tu - Tv = 0$, luego $u - v$ está en KerT, que se reduce a 0, luego $u - v = 0$ y $u = v$.

La segunda afirmación es obvia.

Esta propiedad es muy útil: para ver si una aplicación lineal es inyectiva basta con que comprobemos que de $Tu = 0$ se deduce que $u = 0$. Ventajas de ser lineal.

Ejemplo.- Para comprobar que $T : \mathbf{R}_2[X] \to \mathbf{R}^3$ dada por $T(p) = (p(0), p'(0), p''(0))$ es un isomorfismo basta comprobar que KerT $= 0$.

Más ejemplos:

$T : \mathbf{R}_2[X] \to \mathbf{R}_1[X]$ dada por $T(p) = p'$

$T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ dada por $T(x, y) = (x + y, x - y)$

$T : \mathbf{R}_2[X] \to \mathbf{R}^3$ dada por $T(p) = (p(0), p(1), p(2))$

$T : \mathbf{R}_2[X] \to \mathbf{R}^3$ dada por $T(p) = (p(0), p^2(1), p(2))$ (¡ojo! no es lineal)

$T : \mathbf{R}[X] \to \mathbf{R}[X]$ dada por $T(p) = p + p'$

$T : C^0(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$ dada por $T(f) = \int_0^1 f$

Ejercicios

Calcule núcleo e imagen de las siguientes aplicaciones lineales:

$T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ dada por $T(x, y, z) = (x + 2y - z, 3x - y)$

$T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ dada por $T(x, y) = (x + 2y, 3x + 6y)$

$T : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ dada por $T(a + ib) = b - ib$

$T : M_{2\times 2} \to M_{2\times 2}$ dada por $T(A) = A - A^T$

Ejercicio.- Discuta si puede haber o no una aplicación lineal $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ que sea inyectiva (¿y sobreyectiva?). La misma cuestión para $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$.

Relación entre las dimensiones del núcleo y la imagen: Veamos una importante relación entre las dimensiones del núcleo y de la imagen, de gran utilidad:

Teorema.- Si U y V son espacios vectoriales de dimensión finita, y $T : U \to V$ es una aplicación lineal, entonces $dim(KerT) + dim(ImT) = dim(U)$

Demostración (esbozo): Sea $\{u_1, \ldots, u_k\}$ una base de KerT; ampliémosla a una base de U con $u_{k+1}, \ldots, u_n$. Entonces $\{Tu_{k+1}, \ldots, Tu_n\}$ es una base de ImT.

Así pues $dim(KerT) + dim(ImT) = k + (n - k) = n = dim(U)$

Consecuencias.- Esa fórmula que relaciona las dimensiones del núcleo y la imagen nos sirve para establecer fácilmente algunos resultados, tales como el siguiente:

Proposición.- Si $A \cdot X = 0$ es una sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas, sus soluciones forman un espacio vectorial de dimensión igual a $n - rg(A)$.

Demostración: Consideramos la aplicación lineal $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ dada por $T(u) = A \cdot u$ (donde estamos escribiendo los vectores de $\mathbf{R}^n$ y $\mathbf{R}^m$ en vertical, como vectores columna).

Las soluciones del sistema $A \cdot X = 0$ son precisamente los vectores del núcleo de T, por lo que forman un subespacio vectorial de $\mathbf{R}^n$ cuya dimensión es igual a $n - dim(ImT)$, de acuerdo con la fórmula de las dimensiones.

Por otra parte, el espacio ImT no es sino el espacio columna de la matriz A, (puesto que $A \cdot u$ es igual a una combinación lineal de las columnas de A, con coeficientes las componentes de u), por lo que la dimensión de ImT será igual a la dimensión de ese espacio columna, que es el rango de A, y por ende, la dimensión del núcleo ha de ser igual a $n - rg(A)$.

Por la misma razón, la dimensión de un subespacio vectorial de $\mathbf{R}^n$ definido por varias ecuaciones implícitas es igual a $n-r$ siendo r el número de ecuaciones linealmente independientes (cada ecuación rebaja una unidad la dimensión del subespacio).

la fórmula de las dimensiones nos permite demostrar definitivamente el teorema de Rouché-Fröbenius. Recordemos el enunciado:

Teorema (Rouché-Fröbenius).- Sea $A \cdot X = b$ un sistema de m ecuaciones lineales en n incógnitas. Sean r el rango de la matriz A y $r*$ el rango de la matriz ampliada $(A|b)$.

Si $r < r*$, el sistema no tiene solución (sistema incompatible)

Si $r = r* = n$, el sistema tiene una sola solución (sistema compatible determinado)

Si $r = r* < n$, el sistema tiene una cantidad infinita de soluciones (sistema compatible indeterminado).

Demostración:

En primer lugar, el sistema será compatible (es decir, tendrá solución) cuando el vector b sea una combinación lineal de los vectores columna de A (con unos coeficientes $x_1, \dots, x_n$), es decir, cuando el rango de la matriz ampliada coincida con el de la matriz de los coeficientes; será incompatible en caso contrario. Esto establece la primera parte del teorema.

Para demostrar la segunda parte, supongamos que $r = r*$ y llamemos S_b al conjunto de las soluciones del sistema $A \cdot X = b$ (que no es vacío, porque la condición $r = r*$ asegura la compatibilidad). Sea X_p una solución concreta; la aplicación $f : S_0 \to S_b$ definida por $f(X) = X_p + X$ es una biyección, como es fácil de comprobar (es lo que expresa la fórmula tradicional "la solución general del sistema no homogéneo es la suma de una solución particular más la solución general del sistema homogéneo asociado"). Por tanto, el sistema $A \cdot X = b$ tiene tantas soluciones como el $A \cdot X = 0$, es decir, sólo una si $r = n$ y muchas si $r < n$ (según se deduce de la primera consecuencia que vimos: que la dimensión de S_0 es igual a $n - r$).

La demostración del teorema queda así concluida.

Otra consecuencia de la fórmula de las dimensiones: Si U y V tienen la misma dimensión (finita), y $T : U \to V$ es una aplicación lineal inyectiva, entonces es también sobreyectiva, y viceversa; cualquiera de las dos condiciones implica la otra.

En efecto, si T es un monomorfismo, entonces su núcleo se reduce a 0, por lo que será $dim(ImT) = dim(U) - 0 = dim(U) = dim(V)$ y T será un epimorfismo. Recíprocamente, si T es epimorfismo, entonces $ImT = V$ y la fórmula de las dimensiones nos da $dim(KerT) = 0$, por lo que el núcleo de T será 0 y T es un monomorfismo.

Observación.- En dimensión infinita, puede haber endomorfismos inyectivos no suprayectivos y a la inversa, tal como muestran los siguientes ejemplos en el espacio $\mathbf{R}[X]$ de los polinomios:

$D(p) = p'$ (que consiste en derivar) es un epimorfismo no inyectivo. En su núcleo están los polinomios constantes.

$T(p) = x \cdot p$ (que consiste en multiplicar cada polinomio por x) es un monomorfismo no suprayectivo. Es fácil comprobarlo (hágalo).

Ejercicio.- La fórmula $T(f) = f - f'$ define un endomorfismo en el espacio vectorial $C^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ de las funciones reales de variable real que admiten derivadas de todos los órdenes. También define un endomorfismo en el espacio $\mathbf{R}[X]$, y en los diferentes espacios $\mathbf{R}_n[X]$ (éstos son de dimensión finita, al contrario que los dos primeros). En rigor, habría que denominar de modo distinto a la transformación dependiendo del espacio en que actúe, puesto que una aplicación no es sólo una fórmula o una regla, sino que requiere especificar los conjuntos de partida y de llegada; como no hay posibilidad de confusión aquí, no lo haremos así. Discuta en cada caso si T es inyectiva o no y si es o no sobreyectiva. La respuesta es curiosa e interesante (y en algún caso moderadamente difícil, pues supone resolver una ecuación diferencial, aunque sea de las menos espinosas).

<u>Matriz de una aplicación lineal (respecto de unas bases)</u>

Una herramienta muy útil para el manejo y el estudio de las aplicaciones lineales son las matrices. De hecho, en la práctica ésa es la forma en que nos solemos desenvolver para resolver cualquier cuestión relativa a homomorfismos de espacios vectoriales: usando matrices. Vamos a ver cómo.

Las aplicaciones lineales entre espacios vectoriales (de dimensión finita) son muy sencillas: las conocemos en cuanto sabemos el efecto que tienen sobre unos pocos vectores; si conocemos los transformados $Tu_1, \ldots, Tu_n$ de los vectores de una base de U, $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$, ya conocemos cómo se transforman *todos* los vectores del espacio U: la linealidad es la responsable, puesto que cualquier vector u de U se escribe como una combinación lineal de los vectores de la base

$u = x^1 \cdot u_1 + \ldots + x^n \cdot u_n$

(los escalares x^k son las coordenadas de u respecto de la base B), y su imagen será

$Tu = x^1 \cdot Tu_1 + \ldots + x^n \cdot Tu_n$

así que el conocimiento escueto de unos cuantos vectores $Tu_1, \ldots, Tu_n$ es todo lo que necesitamos para conocer perfectamente la transformación lineal T (recuerden que en un espacio vectorial una base nos permite controlar todo el espacio).

A su vez, esos vectores $Tu_1, \ldots, Tu_n$ son conocidos tan pronto como sabemos cuáles son sus coordenadas respecto de una base de V, $\{v_1, \ldots, v_m\}$:

$Tu_j = a_{1j} \cdot v_1 + \ldots + a_{mj} \cdot v_m$

o, con la notación del sumatorio:

$Tu_j = \sum_{k=1}^{m} a_{kj} \cdot v_k$

Así, toda la información sobre T está recogida en la tabla de números (a_{ij}) que es conocida como "*matriz de T respecto de las bases mencionadas*". Precisando:

<u>Definición</u>.- Si $T : U \to V$ es una aplicación lineal, B = $\{u_1, .., u_n\}$ es una base de U, B' = $\{v_1, .., v_m\}$ es una base de V, entonces *la matriz de T respecto de B y B'* es la matriz $m \times n$ que tiene en la j-ésima columna las coordenadas del vector $T(u_j)$ respecto de B'.

<u>Ejemplo</u>.- La matriz de la aplicación $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ dada por $T(x, y, z) = (x + 2y - z, 3x - y)$ respecto de las bases canónicas de $\mathbf{R}^3$ y $\mathbf{R}^2$ es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz de la misma aplicación lineal respecto de la base $B_1 = (2, 3, 1), (1, -1, 0), (1, 0, 0)$ de $\mathbf{R}^3$ y de la base canónica de $\mathbf{R}^2$ es

$$A' = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

La matriz respecto de la base canónica de $\mathbf{R}^3$ y la base $B_2 = (2, 3), (1, 2)$ de $\mathbf{R}^2$ es

$$A'' = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -2 \\ 3 & -8 & 3 \end{pmatrix}$$

Y la matriz respecto a las bases B_1 y B_2 es

$$A''' = \begin{pmatrix} 11 & -6 & -1 \\ -15 & 11 & 3 \end{pmatrix}$$

Conociendo la matriz de una aplicación lineal en unas bases es inmediato encontrar el transformado de cualquier vector. Para calcular la imagen $T(u)$ de un vector u, conociendo la matriz A de T respecto de B y B', basta con hacer lo siguiente: se expresa el vector u en la base B

$u = x^1 \cdot u_1 + \ldots + x^n \cdot u_n$

el vector columna

$$X = u_B = \begin{pmatrix} x^1 \\ . \\ . \\ x^n \end{pmatrix}$$

recoge esas coordenadas. El producto

$$A \cdot X = Y = \begin{pmatrix} y^1 \\ . \\ . \\ y^m \end{pmatrix}$$

nos da las coordenadas de $T(u)$ en la base B', así que $Tu = y^1 \cdot v_1 + \ldots + y^m \cdot v_m$

La demostración es sencilla. Pruebe a hacerla para $n = m = 2$. En el caso general, puede razonarse así:

$u = x^1 \cdot u_1 + \ldots + x^n \cdot u_n = \sum_{j=1}^n x^j \cdot u_j \Rightarrow Tu = \sum_{j=1}^n x^j \cdot Tu_j = \sum_{j=1}^n x^j \cdot \sum_{k=1}^m a_{kj} \cdot v_k$

o sea $Tu = \sum_{k=1}^m y^k \cdot v_k$

siendo $y^k = \sum_{j=1}^n x^j \cdot a_{kj}$

que no es sino el k-ésimo elemento del producto matricial $A \cdot X$.

Ejemplo.- Si la matriz de una aplicación $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ en las bases B_1 y B_2 dadas anteriormente es

$$A''' = \begin{pmatrix} 11 & -6 & -1 \\ -15 & 11 & 3 \end{pmatrix}$$

entonces la imagen del vector $u = (4, 2, 1)$ es $v = (7, 10)$ puesto que las coordenadas de u en B_1 son $(1, 1, 1)$, es decir

$$u_{B1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

y el producto $A''' \cdot u_{B1}$ nos dará las coordenadas de $v = Tu$ respecto de B_2, o sea

$$v_{B2} = \begin{pmatrix} 11 & -6 & -1 \\ -15 & 11 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Así que el vector $v = Tu$ será $4 \cdot (2,3) + (-1) \cdot (1,2) = (7,10)$

La fórmula $A \cdot X = Y$ se conoce como *expresión matricial del homomorfismo T respecto de las bases B y B'*, pues cambia las coordenadas de un vector respecto de B en las de su transformado respecto de B'.

Efecto de un cambio de base

Vamos a ver cómo cambia la expresión matricial de un homomorfismo al cambiar de base. Sea $T : U \to V$ una aplicación lineal, B una base de U, B' una base de V, A la matriz de T respecto de esas bases. Si C es otra base de U y C' es otra base de V, la matriz de T respecto de C y C' no será seguramente la misma matriz A, sino otra, A'. ¿Qué relación hay entre ellas y cómo puede pasarse de una a la otra? La respuesta es sencilla:

Proposición.- Sea P = (B:C) la matriz de paso de C a B, y sea Q = (B':C') la matriz de paso de C' a B'. Entonces, la matriz de T respecto de C y B' es el producto $A \cdot P$, la matriz de T respecto de B y C' es el producto $Q^{-1} \cdot A$, y la matriz de T respecto de C y C' es $Q^{-1} \cdot A \cdot P$,(es decir: un cambio de base en el espacio de partida modifica la matriz de la transformación multiplicándola a su derecha por la matriz del cambio de base, y un cambio de base en el espacio de llegada modifica la matriz de la transformación multiplicándola a su izquierda por la matriz del cambio de base inverso).

Demostración.- La comprobación es inmediata: recordando que el efecto de la matriz de paso P = (B:C) es transformar las coordenadas respecto de C en coordenadas respecto de B, escribimos $P \cdot u_C = u_B$; como $A \cdot u_B = Tu_{B'}$, se sigue que $A \cdot P \cdot u_C = Tu_{B'}$, que es lo que significa el que $A \cdot P$ sea la matriz de T respecto de las bases C y B'.

De manera análoga se comprueba que la matriz de T respecto de las bases B y C' es el producto $Q^{-1} \cdot A$: $Q^{-1} \cdot A \cdot u_B = Q^{-1} \cdot Tu_{B'} = (C' : B') \cdot Tu_{B'} = Tu_{C'}$.

Por tanto, si se realizan cambios de base en los dos espacios, la matriz resultante será $Q^{-1} \cdot A \cdot P$.

Ejemplo.- La aplicación $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ dada por $T(x,y,z) = (x+2y-z, 3x-y)$ tiene respecto de diferentes bases de $\mathbf{R}^3$ y $\mathbf{R}^2$ las matrices que se mostraron anteriormente. Las matrices de cambio de base de B_1 y B_2 a las bases canónicas son

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Los productos $A \cdot P$, $Q^{-1} \cdot A$ y $Q^{-1} \cdot A \cdot P$ resultan ser iguales a A', A'' y A''' respectivamente. Compruébelo.

La proposición anterior justifica la siguiente definición:

Definición.- Dos matrices del mismo tamaño, A y A', se dicen *equivalentes* cuando existen matrices regulares P y Q tales que $A' = Q^{-1} \cdot A \cdot P$.

También podríamos haber definido *matrices equivalentes* como aquellas que corresponden a una misma aplicación lineal expresada en bases diferentes.

Ejercicio: Compruebe que esa relación es simétrica, es decir, que los papeles de A y A' se pueden intercambiar en la definición. Compruebe también que es transitiva: si A y A' son equivalentes y también lo son A' y A", entonces lo serán igualmente A y A".

Proposición.- Dos matrices del mismo tamaño son equivalentes si y sólo si tienen el mismo rango.

Demostración: Desde luego, si A y A' son equivalentes, sus rangos son iguales, porque ambas matrices representan a una misma aplicación lineal, T (aunque usando bases diferentes), y el rango de una matriz es la dimensión del espacio Im(T), que no depende de la base que empleemos. Recíprocamente, si el rango de A es r, sea $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ el homomorfismo cuya matriz respecto de las bases canónicas es A; como $r = rango(A) = dim(ImT)$, la dimensión del núcleo será $n-r$; sea $\{u_{r+1}, \ldots, u_n\}$ una base de $KerT$, y sean $u_1, \ldots, u_r$ vectores que completan con aquellos una base, $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ de $\mathbf{R}^n$. Entonces, $\{Tu_1, \ldots, Tu_r\}$ es una base de ImT que se extiende a una base B' de $\mathbf{R}^m$. La matriz de T respecto de estas bases es la matriz J_r que tiene unos en los lugares $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{rr}$ y ceros en los demás sitios. Como A y J_r representan al mismo homomorfismo, T, son matrices equivalentes. Por la misma razón, A' es equivalente a J_r, y la simetría y transitividad nos garantizan que A y A' son equivalentes.

Así pues, la equivalencia entre matrices queda descrita por un número: el rango.

Matriz de una composición

Proposición.- La composición de homomorfismos se corresponde con el producto de matrices: si U, V, W son tres espacios vectoriales en los que tenemos sendas bases B, B', B"; $T : U \to V$, $L : V \to W$ son dos homomorfismos, A es la matriz de T respecto de las bases B y B', A' es la matriz de L respecto de B' y B", entonces la matriz de la composición $LT : U \to W$ respecto de B y B" es el producto $A' \cdot A$.

La demostración es inmediata: $A' \cdot A \cdot u_B = A' \cdot Tu_{B'} = LTu_{B''}$.

Ejercicio.- Demuestre que el rango del producto de dos matrices no puede ser mayor que el rango de ninguna de ellas (Idea: las columnas de $M \cdot N$ son combinaciones lineales de las columnas de M, por lo que el subespacio que generan está contenido en el espacio columna de M).

Matrices de endomorfismos

Cuando el espacio de partida y el de llegada coinciden, tenemos un endomorfismo $T : U \to U$. En este caso, la matriz será cuadrada. Es infrecuente (y casi antinatural) considerar dos bases diferentes en U; una como base de partida y otra de llegada; lo normal es pensar en una misma base, y referirse a la matriz de T respecto de esa base.

Proposición.- Si A es la matriz de T en una base B, entonces A es regular si y sólo si T es un isomorfismo.

Demostración: En espacios de dimensión finita, para que T sea isomorfismo es CNS que sea epimorfismo, es decir que ImT = U, lo cual equivale a que la dimensión de ImT sea la de U. Como esa dimensión es el rango de A, hemos demostrado que T es isomorfismo sii el rango de A es máximo, lo que es tanto como decir que A es regular.

Proposición.- Si A es la matriz de un isomorfismo T en una base B, entonces A^{-1} es la matriz del isomorfismo inverso T^{-1} en la misma base.

La demostración es inmediata.

¿Cuándo dos matrices cuadradas representan a un mismo endomorfismo (en bases diferentes)? Esta pregunta nos conduce al importante concepto de *semejanza de matrices* (que no hay que confundir con la equivalencia de matrices).

Definición.- Dos matrices cuadradas del mismo tamaño, A y A', se dicen *semejantes* cuando existe una matriz regular P tal que $A' = P^{-1} \cdot A \cdot P$.

Dicho de otra manera: *matrices semejantes corresponden a un mismo endomorfismo expresado en bases diferentes.*

Ejercicio: Compruebe que esa relación es simétrica, es decir, que los papeles de A y A' se pueden intercambiar en la definición. Compruebe también que es transitiva: si A y A' son semejantes y también lo son A' y A", entonces lo serán igualmente A y A".

Así como el rango es un invariante sencillo que caracteriza la equivalencia de matrices, no es fácil caracterizar la semejanza de una manera tan elemental. Nos acercaremos a ello cuando estudiemos los autovalores de un endomorfismo (en un capítulo posterior).

Proyección sobre un subespacio

Si el espacio U es suma directa de dos subespacios, $U = U_1 \bigoplus U_2$, cada vector de U se escribe de una sola manera como suma de uno de U_1 y otro de U_2, $u = u_1 + u_2$. Eso permite definir una aplicación $T : U \to U$ asociando a cada vector u el término u_1, es decir, la parte de la suma que está en el subespacio U_1. Se puede comprobar fácilmente que T es lineal (hágalo). Esa aplicación se denomina "proyección sobre el subespacio U_1 paralela a U_2".

El núcleo de esa proyección es el subespacio U_2, y la imagen es U_1. Demuéstrelo como ejercicio.

Puede observarse que un subespacio puede tener muchos suplementarios diferentes (muéstrelo con un ejemplo en $\mathbf{R}^2$). Use ese ejemplo para probar que si $U = U_1 \bigoplus U_2 = U_1 \bigoplus U_3$, con $U_2 \neq U_3$ entonces la proyección sobre U_1 paralela a U_2 es distinta de la proyección sobre U_1 paralela a U_3. No hay que confundir esta proyección con la proyección ortogonal sobre un subespacio, en la cual el subespacio suplementario que se usa es el llamado "complemento ortogonal", que estudiaremos en un capítulo posterior, cuando veamos productos escalares.

Ejercicio.- En el espacio $\mathbf{R}^3$ se considera el subespacio definido por la ecuación $x+2y+3z=0$ y los tres subespacios U_1, U_2, U_3 definidos respectivamente por las ecuaciones $x=y=0$, $x=z=0$, $x=y=z$. Se pide demostrar que los tres son suplementarios del primero y expresar las tres proyecciones sobre aquél paralelas a esos tres subespacios. Calcular sus matrices en la base canónica de $\mathbf{R}^3$, y también en la base $\{(1,0,1),(1,1,0),(0,1,1)\}$.