# Capítulo 2. Sistemas de ecuaciones lineales. Cálculo matricial

## Introducción

Si el capítulo anterior tenía un claro tono teórico, éste es eminentemente práctico. Si en aquél se presentaban algunos conceptos básicos y esenciales del AL, en éste nos centraremos en cómo resolver sistemas de ecuaciones y cómo operar con las matrices para conseguir la máxima eficacia.

El objeto de estudio serán los sistemas de ecuaciones lineales. Yendo de lo particular a lo general, fijamos nuestra atención en un ejemplo, tal como

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 1, \\ 2x + 3y - z = 2, \\ 3x + 4y + 2z = 1 \end{cases}$$

¿Cómo resolvemos ese sistema?, mejor aún, ¿cómo nos enfrentamos a él, con qué estrategia? Un ataque directo y un poco tosco podría consistir en despejar una incógnita en una ecuación (e. g., $x = 1 - 2y + 3z$) y sustituir ese valor en las otras dos ecuaciones, rebajando así el número de ecuaciones y el de incógnitas. Repitiendo la jugada, llegamos a una ecuación de primer grado en una sola incógnita, que resolvemos fácilmente, y nos permite resolver el sistema volviendo sobre nuestros pasos. El procedimiento es sencillo de comprender y funciona razonablemente, pero se puede mejorar, y eso es lo que vamos a hacer.

La idea que simplifica los cálculos es insultantemente simple: sumar (o restar) a cada ecuación un múltiplo adecuado de la primera para eliminar la incógnita $x$. Así, si a la segunda ecuación le restamos el doble de la primera, y a la tercera ecuación le restamos el triple, nos queda el sistema

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 1, \\ -y + 5z = 0, \\ -2y + 11z = -2 \end{cases}$$

Este sistema es equivalente al dado, en el sentido de que tienen exactamente las mismas soluciones (piense por qué; de hecho, el sistema original se recupera a partir del modificado sumando a las ecuaciones segunda y tercera múltiplos adecuados de la primera). Las dos últimas ecuaciones forman un subsistema en el que no aparece $x$; hemos reducido el número de ecuaciones y el de incógnitas. En ese sistema reducido, hacemos lo mismo que antes: sumar o restar a la tercera ecuación un múltiplo de la segunda (en concreto, el doble) para eliminar la incógnita $y$; quedará el sistema:

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 1, \\ -y + 5z = 0, \\ z = -2 \end{cases}$$

Este último es un sistema que se resuelve solo (de abajo hacia arriba). La solución es $z = -2, y = -10, x = 15$. Se puede comprobar fácilmente en el sistema original que efectivamente lo satisface.

Lo que hemos hecho se conoce como operaciones elementales en el sistema de ecuaciones, y se capta mejor su esencia si le hacemos una radiografía al sistema y nos quedamos con su esqueleto matricial. Recogemos en una sola matriz los coeficientes del sistema y los términos independientes, de modo que la matriz tendrá la forma $(A|b)$ siendo $b$ la columna de los números a la derecha del signo $=$ y $A$ la matriz de los coeficientes. En nuestro ejemplo es ésta:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

La operación de restar a la segunda ecuación el doble de la primera se traduce por restar a la segunda fila de la matriz el doble de la primera: $F_2 - 2 \cdot F_1$; a continuación, hemos hecho $F_3 - 3 \cdot F_1$, $F_3 - 2 \cdot F_2$; al final, la matriz queda en la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Que se conoce como matriz escalonada y deja el sistema casi resuelto. Si el sistema inicial hubiese sido

$$\left\{ \begin{array}{l} x + 2y - 3z = 1, \\ 2x + 3y - z = 2, \\ 3x + 4y + z = 1 \end{array} \right.$$

las mismas operaciones elementales habrían conducido al sistema equivalente

$$\left\{ \begin{array}{l} x + 2y - 3z = 1, \\ -y + 5z = 0, \\ 0z = -2 \end{array} \right.$$

que no tiene solución, revelando así que tampoco la tenía el sistema original (decimos que es un sistema incompatible). Del mismo modo, si el primer sistema fuese

$$\left\{ \begin{array}{l} x + 2y - 3z = 1, \\ 2x + 3y - z = 2, \\ 3x + 4y + z = 3 \end{array} \right.$$

de nuevo las mismas operaciones elementales habrían producido el sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} x + 2y - 3z = 1, \\ -y + 5z = 0, \\ 0z = 0 \end{array} \right.$$

que tiene una infinidad de soluciones, a saber $z = t$ (cualquiera), $y = 5t$, $x = 1 - 7t$, que serán las soluciones del sistema de partida (decimos que es un sistema compatible indeterminado; el primero, que tenía una sola solución, es un sistema compatible determinado).

Así, las oe en el sistema (o en la matriz) permiten decidir si hay solución o no y encontrarlas todas.

Una pequeña molestia que se puede presentar consiste en que alguno de los pivotes sea 0 (llamamos pivotes a las entradas de la matriz - o coeficientes de las ecuaciones - cuyos múltiplos utilizamos para “hacer ceros” en las filas inferiores; en nuestro ejemplo, el primer pivote es 1 (coeficiente de $x$ en la primera ecuación) y el segundo es $-1$ (coeficiente de $y$ en la segunda ecuación, después de haber hecho ceros apoyados en el primer pivote); el tercer pivote también es 1, pero ya no lo utilizamos, aunque podríamos haberlo hecho para hacer ceros hacia arriba y simplificar aún más el sistema). Un ejemplo concreto ayudará a entenderlo. Sea el sistema

$$\begin{cases} x+2y-3z=-1, \\ 2x+4y-z=3, \\ 3x+4y+z=2 \end{cases}$$

Al apoyarnos sobre el pivote 1 hacemos $F_2 - 2 \cdot F_1$ seguido de $F_3 - 3 \cdot F_1$, y queda

$$\begin{cases} x+2y-3z=1, \\ 5z=5, \\ -2y+10z=5 \end{cases}$$

Ahora, la segunda fila de la matriz es $(0,0,5,5)$, y la tercera $(0,-2,10,5)$: no hay ningún múltiplo de la segunda ecuación que nos permita eliminar la $y$ de la tercera (dicho de otro modo, no podemos pivotar sobre el 0 de la segunda fila para hacer ceros por debajo). El remedio es sencillo: permutar las dos filas, pasando la tercera al segundo lugar, así tenemos el pivote $-2$, que no es nulo y podemos apoyarnos en él para hacer ceros debajo.

En este ejemplo concreto, ya no hay más ecuaciones y están ya hechos todos los ceros que queremos; de hecho, podría pensarse que no hay sino despejar z en la ecuación segunda y resolver cómodamente. No debemos dejarnos llevar por el caso particular; en general habrá más ecuaciones y más incógnitas, y no será tan sencillo hacer eso. Lo que sí es sencillo siempre y siempre funciona es cambiar el orden de las ecuaciones (o sea, intercambiar las filas de la matriz).

Volviendo al primer ejemplo y viéndolo matricialmente, lo que hicimos fue empezar con una matriz, A, y modificarla restando a la segunda fila el doble de la primera. Ese es el mismo efecto que se produce al multiplicar por la izquierda a la matriz A por la matriz

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_1 \cdot A = A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 5 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

A continuación, en la nueva matriz restamos a la tercera fila el triple de la primera, que es lo mismo que multiplicar por la matriz

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_2 \cdot A_1 = A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & 11 \end{pmatrix}$$

Finalmente, restar el doble de la segunda fila a la tercera es tanto como multiplicar por la matriz

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_3 \cdot A_2 = A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En definitiva, $E_3 \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A = E \cdot A = A_3$

Al final, conseguimos la matriz escalonada $A_3$ multiplicando (a la izqda) A por la matriz cuadrada $E = E_3 \cdot E_2 \cdot E_1$ . Merece la pena observar que esta matriz E se obtiene multiplicando matrices triangulares inferiores (los elementos por encima de la diagonal son todos nulos), y por eso es ella misma triangular inferior

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Si quisiésemos deshacer los cambios, deberíamos multiplicar por la matriz inversa de $E$: $E^{-1} \cdot A_1 = A$. Es de destacar que la matriz inversa de E es el producto de las inversas de $E_1$, $E_2$ y $E_3$ en el orden opuesto: $E^{-1} = (E_3 \cdot E_2 \cdot E_1)^{-1} = E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \cdot E_3^{-1}$ . No hay nada extraño en ello: para desatar varios nudos tenemos que empezar por deshacer el último que se ató.

En el ejemplo concreto que manejamos, podemos observar que las inversas de las matrices $E_k$ son triviales (para deshacer "restar el doble de la primera" lo que hacemos es "sumar el doble de la primera"), y su producto simplemente recoge esas operaciones en una sola matriz (que, por cierto, también es triangular inferior):

$$E^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Los números 2, 3, 2 que aparecen por debajo de la diagonal corresponden a los múltiplos empleados para simplificar el sistema (restar el doble o el triple de una fila a una paralela). Puede parecer extraño que esos coeficientes aparezcan en la matriz $E^{-1}$ que deshace los cambios, y sin embargo no se vean con esa claridad en la matriz E (por ejemplo, en E aparece el número 1 en la posición $3,1)$: la razón es que cuando hacemos la tercera oe $F_3 - 2 \cdot F_2$ la segunda y tercera filas ya no son las originales de A, sino las de $A_2$ que había sido alterada; si nos queremos referir a las filas originales, la fila resultante sería $(F_3 - 3 \cdot F_1) - 2 \cdot (F_2 - 2 \cdot F_1)$, que es igual a $F_3 - 2 \cdot F_2 + F_1$; por ahí se ve que deben aparecer números como ese 1. Sin embargo, en $E^{-1}$ no se produce ese efecto porque al deshacer las operaciones sumamos filas que no producen interferencias puesto que hay ceros en los lugares correctos.

*Recordemos*: hemos encontrado una matriz triangular inferior, E, que multiplicada por A nos da la matriz escalonada $A_3$. Si la matriz A fuese cuadrada, lo sería también la matriz transformada $A_3$ y se trataría de una matriz triangular superior. Así pues, $E \cdot A = A_3$ y $A = E^{-1} \cdot A_3$ donde el primer factor es una matriz triangular inferior y el segundo, una matriz triangular superior: Se suele escribir $A = L \cdot U$, como regla mnemotécnica (de las iniciales en inglés de "lower" y "upper"). Así hemos descompuesto una matriz cuadrada en producto de una triangular inferior y una superior y para ello sólo hemos utilizado oe en las filas de la matriz.

Si algún pivote fuese nulo, deberíamos haber permutado filas en A, y la descomposición anterior se escribiría $P \cdot A = L \cdot U$, siendo P una matriz que permuta filas (para lo cual P a su vez no es más que el resultado de permutar esas filas en la matriz I).

Desde el punto de vista de los sistemas de ecuaciones, ese producto representa la transformación en un sistema equivalente más sencillo (trivial, de hecho). Desde el punto de vista de las matrices, es una descomposición interesante que aprovecharemos enseguida.

Escribiendo $A = L \cdot U$, el sistema $A \cdot X = b$ se puede descomponer en dos: por una parte $L \cdot Y = b$, y por otra $U \cdot X = Y$. El primero se resuelve muy fácilmente, por ser la matriz $L$ triangular (inferior), y una vez hallada la solución $Y$ (si la tiene), el segundo también se resuelve sin dificultad, por ser triangular (superior) la matriz $U$.

Quiero subrayar la gran ventaja práctica que supone esa descomposición si queremos resolver varios sistemas de ecuaciones con la misma matriz de coeficientes y diferentes términos independientes (algo natural si se piensa en una estructura a la que se somete a diferentes cargas, o una "máquina" que tiene que responder a estímulos diversos: la matriz de coeficientes describe la parte fija - la estructura o la máquina - mientras que los estímulos externos vienen representados por los términos independientes). En ese caso, la descomposición LU se hace de una vez por todas y los diversos sistemas se resuelven cómodamente, sin tener que hacer la eliminación gaussiana en cada caso.

Manejar los conceptos de subespacio y combinación lineal nos va a permitir entender mejor por qué unos sistemas de ecuaciones tienen solución y otros no. Veamos el sistema $A \cdot X = b$ de esta forma: $A \cdot X$ no es más que $x \cdot C_1 + y \cdot C_2 + z \cdot C_3$, es decir, una combinación lineal de los vectores columna de la matriz A (que he supuesto que tiene 3 columnas, por fijar ideas); los coeficientes son las incógnitas $x$, $y$, $z$. El sistema $A \cdot X = b$ plantea entonces si existirán ciertos coeficientes tales que la cl resulte ser igual al vector dado $b$; dicho de otro modo, se trata de ver si $b$ es o no cl de los vectores columna de A (o si se prefiere, si $b$ pertenece al subespacio vectorial generado por las columnas de A).

De esta forma, el sistema de ecuaciones $A \cdot X = b$ tendrá solución cuando el espacio vectorial $L(C_1, C_2, C_3)$ generado por las columnas de $A$ sea el mismo que el generado por esas columnas y por $b$, $L(C_1, C_2, C_3, b)$. Como el primero es ciertamente un subespacio del segundo, el que coincidan o no dependerá exclusivamente de si tienen o no la misma dimensión. Así, una CNS para que el sistema tenga solución es que las dimensiones de esos subespacios vectoriales de $\mathbf{R}^n$ coincidan.

Se llama *rango de un conjunto de vectores* a la dimensión del subespacio que generan, o lo que es lo mismo, al máximo número de vectores linealmente independientes entre ellos. Por *rango de una matriz* nos referimos al rango de sus vectores columna, o sea, a la dimensión del subespacio de $\mathbf{R}^n$ generado por ellos. Por eso, es frecuente expresar la CNS como que el rango de la matriz $A$ sea igual al de la matriz ampliada $(A|b)$.

La simetría pide definir el espacio fila de la matriz A como el subespacio de $\mathbf{R}^m$ generado por los vectores fila de A. La dimensión de este espacio podría llamarse también rango de A, y habría que distinguir entre el rango por filas y el rango por columnas. Por fortuna, ambas dimensiones coinciden (no lo demostraremos aquí; quizá lo hagamos más adelante), lo que simplifica la situación y nos permite hablar del rango a secas.

En una matriz escalonada, el rango está a la vista: es igual al número de filas (o columnas) en que hay pivotes no nulos (donde hay un "escalón"). Es de subrayar que las oe en las filas no modifican el espacio fila de la matriz, por lo que no se altera el rango. Ahí tenemos un procedimiento muy sencillo y eficaz para calcular el rango de una matriz: reducirla a forma escalonada y contar los escalones.

*Nota*.- Quizá algunos alumnos hayan oído hablar del rango como "el orden del mayor menor no nulo". Ese concepto de rango es equivalente al dado aquí (aunque la frase está mal construida: debería decir algo como "el mayor orden de los menores no nulos"), pero involucra determinantes, lo que supone un grado más alto de sofisticación y una mayor dificultad de cálculo.

El que $b$ sea o no una cl de las columnas de A (o sea, el que el sistema tenga solución o no) se puede expresar, pues, como que el espacio columna de la matriz ampliada $(A|b)$ sea el mismo que el de la matriz de los coeficientes, A, o sea mayor; es decir, que el rango de la matriz ampliada coincida con el de A (sistema compatible) o sea mayor (sistema incompatible). El que haya sólo una solución o una infinidad (en el caso de un sistema compatible) depende de que el rango de A coincida o no con el número de incógnitas del sistema. Éste es el contenido del célebre teorema de Rouché-Fröbenius, que se enuncia a continuación:

**Teorema (Rouché-Fröbenius)**.- Sea $A \cdot X = b$ un sistema de $m$ ecuaciones lineales en $n$ incógnitas. Sean $r$ el rango de la matriz A y $r*$ el rango de la matriz ampliada $(A|b)$.

Si $r < r*$, el sistema no tiene solución (sistema incompatible)

Si $r = r* = n$, el sistema tiene una sola solución (sistema compatible determinado)

Si $r = r* < n$, el sistema tiene una cantidad infinita de soluciones (sistema compatible indeterminado).

El sistema $A \cdot X = 0$ siempre es compatible; la solución obvia $X = 0$ se conoce como solución trivial. Puede que no haya más soluciones y puede que sí (dependiendo de si el rango de A es igual al número de incógnitas o es menor); en cualquier caso, la suma de dos soluciones de $A \cdot X = 0$ es otra solución, y también lo es cualquier múltiplo de una solución, lo que indica que las soluciones del sistema lineal homogéneo $A \cdot X = 0$ forman un subespacio vectorial de $\mathbf{R}^n$ : las conoceremos todas si encontramos una base.

Por otra parte, las soluciones del sistema no homogéneo $A \cdot X = b$ no gozan de esa propiedad (por ejemplo, si $v$ es una solución, $2v$ no lo es ya que $A.2v = 2b \neq b$). Sin embargo, la diferencia entre dos soluciones de $A \cdot X = b$ es una solución del sistema homogéneo asociado $A \cdot X = 0$ (ya que si $A.v = b$, $A.u = b$, entonces $A.(v - u) = b - b = 0$); de ahí se deduce que si conocemos una solución del sistema $A \cdot X = b$ para tener todas las soluciones sólo necesitamos sumarle a esa solución las diferentes soluciones del sistema $A \cdot X = 0$, dicho con la fórmula tradicional:

La solución general del sistema no homogéneo es la suma de una solución particular con la solución general del sistema homogéneo asociado

Esta misma propiedad se presentará, por ejemplo, al resolver ecuaciones diferenciales lineales en Cálculo superior, y facilita su resolución. Se dice que las soluciones forman un espacio afín (que viene a ser como un subespacio vectorial al que se haya desplazado: las rectas y los planos que no pasan por el origen son otros ejemplos de esta estructura). Más adelante dedicaremos algún espacio al estudio de los espacios afines. También volveremos a tratar el asunto de los sistemas de ecuaciones lineales, demostraremos el teorema de Rouché- Fröbenius y veremos la regla de Cramer (cuando hayamos estudiado las aplicaciones lineales y los determinantes).

**Cálculo de la inversa de una matriz mediante operaciones elementales**.

Pensemos ahora en el caso en que la matriz A es cuadrada y de rango máximo, lo que significa que sus columnas son linealmente independientes (y sus filas también). Tales matrices se llaman *matrices regulares* (y también *inversibles*, porque una matriz así, A, tiene inversa, es decir, existe otra matriz cuadrada $A^{-1}$ que satisface $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$). No voy a demostrar que eso es así, pero el alumno haría bien en pensar en la razón de que eso sea así (y de que A no tenga inversa cuando su rango no es el máximo, es decir, cuando sus columnas son linealmente dependientes); lo que voy a hacer es mostrar cómo calcular la matriz $A^{-1}$ mediante oe en las filas de A.

En primer lugar, transformamos A en una matriz triangular superior como hemos mostrado antes: $E \cdot A = U$; la diagonal de U contiene los pivotes, y serán todos distintos de 0 puesto que el rango de U es igual al de A (las oe no lo alteran), es decir, máximo). Ahora hacemos ceros en U por encima de la diagonal pivotando de abajo arriba: primero hacemos ceros en la última columna sumando a cada fila múltiplos de la última, luego hacemos ceros en la columna anterior sumando a las filas múltiplos de la penúltima, y así sucesivamente. Al final, hemos transformado U en una matriz diagonal, D. Veámoslo en nuestro primer ejemplo:

La matriz U es

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

hacemos ceros por encima del último pivote restando a la segunda fila el quíntuplo de la tercera y sumando a la primera el triple de la última: $F_2 - 5 \cdot F_3, F_1 + 3 \cdot F_3$. Luego hacemos $F_1 + 2 \cdot F_2$ para hacer ceros encima del pivote $-1$, y ya tenemos la matriz diagonal D.

El efecto de pasar de U a D se consigue multiplicando por las tres matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

o sea $D = F \cdot U$, siendo F el producto de esas tres matrices (en el orden adecuado).

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -7 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Así pues, tenemos: $F \cdot E \cdot A = F \cdot U = D$. Una última multiplicación, por la matriz diagonal $D'$, que tiene en la diagonal los inversos de los números de la diagonal de D (y supone simplemente dividir cada fila por el correspondiente pivote), nos depara el resultado: $D' \cdot F \cdot E \cdot A = F \cdot U = I$. Así, la matriz $D' \cdot F \cdot E$ es la matriz inversa de A.

Y cómo se hace eso en la práctica, pueden preguntarse. Porque no parece muy atractiva la idea de ponerse a calcular esas matrices y luego multiplicarlas, ¡qué pereza! La cosa es mucho más sencilla. La matriz inversa de A, que acabamos de ver que es $D' \cdot F \cdot E$, puede escribirse también como $D' \cdot F \cdot E \cdot I$, puesto que multiplicar por la matriz unidad, I, no altera el resultado. Ahora bien, ese producto representa hacerle a la matriz I las mismas operaciones elementales en las filas que nos condujeron de la matriz A a la matriz I. Así pues, haciendo en I lo mismo que vamos haciendo en A (y al mismo tiempo), cuando A se ha convertido en I, I se habrá convertido en $A^{-1}$. Colocamos I a la derecha de A, y por el mismo precio de ir haciendo ceros en A vamos obteniendo a la derecha su inversa: $(A|I)\ .\ \ldots\ (I|A^{-1})$. Como ejemplo, el de siempre:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 11 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & -6 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -7 & 11 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -10 & 16 & -7 \\ 0 & -1 & 0 & -7 & 11 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -10 & 16 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 7 & -11 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz

$$\begin{pmatrix} -10 & 16 & -7 \\ 7 & -11 & 5 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

es la inversa de A, como se puede comprobar multiplicándolas.

*Ejercicios*.- Al llegar a este punto, se debe haber practicado con oe para resolver sistemas, para calcular rango de matrices y para hallar la inversa de alguna matriz regular de pequeño tamaño ($2 \times 2$, $3 \times 3$). Puede plantearse también algunos ejercicios un pelín teóricos, como los siguientes:

*Ej1*.- Las matrices $2 \times 2$ triangulares inferiores forman un ev de dimensión 3. Compruébelo encontrando una base. Otro tanto para las matrices triangulares superiores. (Nota: el hecho de que el producto de dos matrices de uno de esos tipos sea una matriz del mismo tipo no es relevante para la estructura de ev). Discuta el caso de las matrices $3 \times 3$ y $n \times n$.

*Ej2*.- Las matrices diagonales forman un subespacio. ¿Cuál es su dimensión? Discuta si las matrices regulares (o inversibles) forman un subespacio o no.

## Matriz traspuesta. Matrices simétricas y antisimétricas.

Una operación aparentemente tonta (pero muy interesante en realidad) que se puede realizar con una matriz es “trasponerla”, que es una palabra impresionante que significa “cambiar las columnas por las filas”. Así, si la matriz A es $n \times m$, su *traspuesta* $A^T$ será $m \times n$; y si el elemento genérico de A es $a_{ij}$, el de $A^T$ es $a_{ji}$. Por ejemplo,

Si

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

entonces

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

La matriz traspuesta de una matriz cuadrada es otra matriz del mismo tamaño. Una matriz que coincida con su traspuesta se denomina *matriz simétrica*. *Matriz antisimétrica* es la que sumada con su traspuesta da la matriz nula, $A + A^T = 0$.

Ejemplos.- Las matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 4 \\ -3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

son simétricas. Las matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

son antisimétricas.

*Ejercicio*.- Las matrices simétricas $2 \times 2$ forman un espacio vectorial cuya dimensión es 3. Encuentre una base y discuta el caso para matrices $3 \times 3$, $n \times n$. Estudie también qué sucede con las matrices antisimétricas.

Como se verá más tarde, las matrices simétricas son muy útiles, y cuando en un problema nos topamos con una matriz simétrica podemos alegrarnos, porque las cosas suelen marchar bien con ellas. Algunas propiedades de la trasposición de matrices y de las matrices simétricas, fáciles de comprobar son:

$(A+B)^T = A^T + B^T$ $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$ (¡atención al orden!) Si A es inversible, su traspuesta también lo es, y $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

*Pregunta*.- Si A y B son matrices simétricas $2 \times 2$, ¿será simétrica necesariamente la matriz producto $A \cdot B$?

*Respuesta*.- En general, no (muéstrese un ejemplo). Sí lo será en el caso en que las matrices A y B conmuten, es decir $A \cdot B = B \cdot A$.

*Ejercicio*.- Sea A una matriz cualquiera $m \times n$. Los productos $A \cdot A^T$ y $A^T \cdot A$ tienen sentido y producen matrices cuadradas. Discuta si son matrices simétricas o no lo son.