Capítulo 1. Espacios vectoriales.

Introducción

En el capítulo anterior, dedicamos cierto tiempo a los espacios vectoriales, destacando las operaciones de sumar vectores y multiplicarlos por escalares, o realizar combinaciones lineales. En éste, vamos a detenernos un poco en su estudio.

Quiero empezar señalando una virtud importante de los espacios vectoriales, que hace su estudio particularmente sencillo: aunque un espacio vectorial contiene muchos vectores (salvo el aburrido espacio nulo, que sólo contiene al vector 0), podemos controlarlos a todos manejando solamente unos pocos: lo que llamamos una base del espacio vectorial. Unos sencillos *ejemplos* aclararán lo que quiero decir:

Una recta consta de muchos puntos (si se prefiere, muchos vectores de posición), pero todos ellos se obtienen estirando o encogiendo uno solo: la recta $x+2y=0$ consta del $(2,-1)$ y de sus múltiplos $(2t,-t)$, lo que hace que ese vector sirva por sí solo para describir la recta entera.

El plano $2x-y+3z=0$ contiene muchos puntos, entre otros el $P=(1,2,0)$ y el $Q=(0,3,1)$. Pues bien, cualquier otro punto del plano responde a la fórmula $(t, 2t+3s, s)$ o sea $t.P+s.Q$: describimos todo el plano con las cl de dos vectores.

Las funciones $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ cuya segunda derivada coincide con la propia función cambiada de signo ($f''=-f$) son muchas, entre las que se cuentan cos y sin. Como todas esas funciones forman un espacio vectorial (puesto que la suma de dos de ellas también cumple la condición, lo mismo que sus múltiplos), podemos aprovechar esa estructura para expresar cualquier función de ese tipo como $f(x)=\lambda\cdot\cos(x)+\mu\cdot\sin(x)$. Lo que acabamos de hacer es resolver una ecuación diferencial, algo que se estudiará con cierta profundidad en Cálculo II. La tal ecuación diferencial es lineal, lo que ha facilitado ¡y mucho! su resolución.

Hay muchas sucesiones (una infinidad) que responden a la relación de recurrencia $x_{n+2}=x_{n+1}+2x_n$; se pueden elegir los dos primeros términos con total libertad. Por ejemplo, $x_0=1, x_1=-10$ determinan $x_2=-10+2.1=-8, x_3=-28$, etc. ¿Cómo calculamos x_{10} o x_{999}? ¿Hay alguna fórmula que exprese el valor de x_n? La pregunta es peliaguda, pero se facilita su respuesta observando que esas sucesiones forman un espacio vectorial (¿por qué?), que hay dos de ellas particularmente sencillas, a saber: $a_n=2^n, b_n=(-1)^n$ (¿de dónde salen? Pruebe con $x_n=r^n$ y busque qué valor debe tomar r). Al intentar expresar la sucesión (x_n) buscada como cl de esas dos, escribiremos $x_n=\lambda\cdot 2^n+\mu\cdot(-1)^n$ de donde sacamos $\lambda+\mu=1$, $2\lambda-\mu=-10$ (haciendo $n=0$ y $n=1$) ; por tanto, $\lambda=-3, \mu=4$, y en general $x_n=-3\cdot 2^n+4\cdot(-1)^n$; así es fácil calcular $x_{10}=-3068$ y cualquier otro término de la sucesión.

Ejercicio.- Encuentre una fórmula para el término general de la sucesión de Fibonacci: $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n; F_0=0, F_1=1$.

Basta de ejemplos. Es hora de empezar el estudio general.

Definición.- La definición de espacio vectorial puede encontrarse en muchos libros, así como en múltiples páginas web. Prefiero no escribirla aquí, y dejar al alumno la tarea de buscarla y tratar de comprenderla. Cuando la consulte, observará que es una definición larga que requiere un conjunto V cuyos elementos (o vectores) se pueden sumar y se pueden multiplicar por escalares (o sea, números reales; en general, elementos de un cuerpo): esas operaciones están sujetas a una lista de condiciones o axiomas que deben cumplirse; es frecuente que la lista comprenda 8 axiomas: cuatro referidos a la suma y otros cuatro al producto por escalares, y vienen a decir que esas operaciones se comportan como esperamos. De todos modos, al final del capítulo se puede encontrar la definición (para que no se me queje nadie).

Primeras propiedades.- En cualquier espacio vectorial se cumplen las siguientes propiedades:

$0 + 0 = 0$

Si $v + v = v$, entonces $v = 0$

$\lambda.0 = 0$, cualquiera que sea el escalar λ

$0.v = 0$, cualquiera que sea el vector v

$\lambda.(-v) = (-\lambda).v = -(\lambda.v)$, cualesquiera que sean λ y v.

Observación: se ha empleado el mismo símbolo para el escalar 0 y para el vector nulo; no es de esperar que ello genere confusión, pues el contexto aclara el sentido en cada caso. Así, cuando escribimos $0.v = 0$, el primer cero es el escalar y el segundo es el vector (en todos los demás casos, es del vector de quien se trata).

Las demostraciones son sencillas, pero acaso al alumno le cuesten algún trabajo, por no estar acostumbrado a lidiar con este tipo de cuestiones. Vamos a detallar con todo cuidado la demostración de la segunda propiedad y de la tercera:

Sea, pues, v un vector tal que $v + v = v$.

Existe otro vector, escrito $-v$, tal que $v + (-v) = 0$; sumemos ese vector a la igualdad anterior: $(v + v) + (-v) = v + (-v)$;

El término de la izquierda es igual a $v + (v + (-v))$ - en virtud de uno de los axiomas -; el de la derecha es 0; así tenemos:

$v + (v + (-v)) = 0$; por tanto,

$v+0 = 0$, y como $v+0$ es v (por otro de los axiomas), se concluye que $v = 0$, como queríamos demostrar.

Vamos ahora con $\lambda.0 = 0$.

Como $0 + 0 = 0$, podemos escribir $\lambda.0 = \lambda.(0 + 0) = \lambda.0 + \lambda.0$.

Pero entonces, el vector $v = \lambda.0$ cumple que $v + v = v$, y de ahí se deduce que ha de ser el vector 0.

Las demás propiedades se demuestran de manera similar. Este método tan puntilloso de demostrar las propiedades es muy lento para el desarrollo del curso; en lo sucesivo, no detallaremos tanto las demostraciones.

Si V es un espacio vectorial, un subconjunto suyo, G, con la propiedad de que todos los vectores de V se pueden expresar como cl de vectores de G se llama *sistema generador* de V. Por lo general, un espacio vectorial tiene muchos sistemas generadores (el propio espacio V es uno, poco interesante). Si alguno de ellos es un conjunto finito diremos que V es un *espacio vectorial finitamente generado* o también un *espacio vectorial de dimensión finita* o un *espacio* *vectorial de tipo finito*. Veamos unos ejemplos:

$\mathbf{R}^2$ está generado por G $=\{(1,0),(0,1)\}$. También $\{(2,3),(1,2)\}$ es sistema generador. Y $\{(1,-2),(2,1),(0,-5)\}$ Hay muchísimos sistemas generadores de $\mathbf{R}^2$ (y de un espacio vectorial en general).

La recta $(x,y): x+2y=0$ tiene G $=\{(2,-1)\}$.

El plano $(x,y,z): 2x-y+3z=0$, G $=\{(1,2,0),(0,3,1)\}$.

El espacio de los polinomios, $\mathbf{R}$[X], no es de dimensión finita. En cualquier conjunto finito de polinomios habrá un grado que no se alcanza, por lo que las cl de esos polinomios no podrán nunca ser polinomios de ese grado (ni superiores).

El espacio $\mathbf{R}_2[X]$, de los polinomios de grado menor o igual que 2 sí es de dimensión finita, pues $\{1,x,x^2\}$ es un sistema generador.

Nuestro estudio se centrará en los espacios vectoriales finitamente generados.

Se observa que un ev puede tener sistemas generadores muy diversos. En particular, se puede presentar redundancia, en el sentido de que eliminando algún vector del sg el subconjunto que queda sea también sg. Eso sucede cuando alguno de los vectores es cl de los demás. Así, en el primer ejemplo, $(0,-5)=2\cdot(1,-2)+(-1)\cdot(2,1)$, y el conjunto $\{(1,-2),(2,1)\}$ también es un sg. Esta situación merece nombre y estudio:

Definición.-Un subconjunto, S, del espacio vectorial V se dice *libre* cuando ninguno de sus vectores es cl de los demás, y se dice *ligado* en caso contrario. También decimos que los vectores de S son *linealmente independientes* en el primer caso y *linealmente dependientes* en el segundo.

Una manera equivalente y muy frecuente de definir esos conceptos es ésta:

Definición.- Los vectores $v_1,v_2,\ldots,v_n$ son linealmente dependientes si existe alguna cl suya no trivial que sea igual al vector nulo, es decir, si existen unos escalares $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ no todos nulos tales que $\lambda_1\cdot v_1+\lambda_2\cdot v_2+\ldots+\lambda_n\cdot v_n=0$.

Son linealmente independientes en caso contrario, es decir, cuando la igualdad $\lambda_1\cdot v_1+\lambda_2\cdot v_2+\ldots+\lambda_n\cdot v_n=0$ obliga a que $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_n=0$.

Una manera sensata de estudiar si unos vectores son linealmente dependientes o independientes es partir de $\lambda_1\cdot v_1+\lambda_2\cdot v_2+\ldots+\lambda_n\cdot v_n=0$ y tratar de deducir de ahí que todos los coeficientes han de ser nulos o encontrar otra posibilidad.

Ejemplo:¿Son linealmente dependientes $u=(1,2,3), v=(3,0,2), w=(-1,4,4)$? Igualamos $a\cdot u+b\cdot v+c\cdot w$ al vector $0=(0,0,0)$ y nos encontramos ante un sistema de tres ecuaciones:

$$\begin{cases} a+3b-c=0, \\ 2a+4c=0, \\ 3a+2b+4c=0 \end{cases}$$

Al resolverlo sale que $a=-2b=-2c$, por lo que $2u-v-w=0$ y los vectores son linealmente dependientes.

Si el tercer vector se sustituye por $w'=(1,4,4)$, la única solución del sistema será la trivial, lo que prueba que los vectores u,v,w' son linealmente independientes.

Otro ejemplo: los polinomios $1, 1+x, 1+x+x^2$ son linealmente independientes, porque $a \cdot 1 + b \cdot (1+x) + c \cdot (1+x+x^2) = 0$ obliga a que $a+b+c=0, b+c=0, c=0$, y eso sólo es posible si $a=b=c=0$.

Comentario.- Un sistema generador de un espacio vectorial puede verse como un subconjunto al que "no le faltan vectores" (para describir el espacio); un sistema libre, como uno al que "no le sobran" (pues ninguno es combinación lineal de los otros). Se comprende que un subconjunto que reúna las dos condiciones ha de ser interesante:

Un subconjunto de un espacio vectorial que sea libre y sistema generador es una ***base*** *del espacio vectorial.* Su existencia está garantizada:

Teorema.- Todo espacio vectorial de dimensión finita tiene una base.

No es difícil demostrarlo. Por ser de dimensión finita, hay un subconjunto finito, G, que es sistema generador; si G es libre, entonces es una base y hemos terminado; si es ligado, es porque contiene un vector, v, que es cl de los demás; eliminando v no queda el sg G'. O bien G' ya es libre (y tenemos la base que pretendemos) o bien no lo es, en cuyo caso podemos eliminar un segundo vector y seguir teniendo un sg. Por este procedimiento, al final el conjunto G quedará "purgado" de los vectores redundantes y habremos dado con una base del espacio (contenida dentro del sg G).

Observaciones.- Esa demostración prueba que *todo sg contiene una base del espacio.* También se puede demostrar que *cualquier sistema libre de vectores se puede ampliar a una base* (con un argumento muy sencillo).

El espacio vectorial trivial, que no contiene más vector que el nulo, tiene por base el conjunto vacío.

También es cierto que cualquier espacio vectorial, aunque no sea de dimensión finita, tiene una base, pero no es fácil de demostrar (hay que usar argumentos finos de Teoría de conjuntos, que involucran el lema de Zorn, a un nivel muy superior al de este curso).

Teorema.- Todas las bases de un espacio vectorial tienen el mismo número de elementos.

No lo demostraremos (aunque no es difícil). Este teorema da pie a definir qué entendemos por *dimensión* de un espacio vectorial:

Definición.- Al número de elementos de una base de V se le llama **dimensión de V**, y se escribe dimV.

Ejemplos: $\mathbf{R}_2[X]$ tiene dimensión 3, puesto que $\{1, 1+x, 1+x+x^2\}$ es una base. Otra base es $\{1, x, x^2\}$. $\mathbf{R}^2$ tiene dimensión 2; la base $\{(1,0),(0,1)\}$ se conoce como base canónica.

Teorema.- Si $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es una base del espacio vectorial V, cualquier vector v de V se escribe de una única manera como cl de los vectores de B.

La demostración es sencilla: como B es sistema generador de V, cualquier vector es cl de los vectores de B. Si un vector se pudiera expresar de dos maneras distintas, se podría escribir $\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \ldots + \lambda_n \cdot v_n = \mu_1 \cdot v_1 + \mu_2 \cdot v_2 + \ldots + \mu_n \cdot v_n$. Restando las dos expresiones se tiene $(\lambda_1 - \mu_1) \cdot v_1 + (\lambda_2 - \mu_2) \cdot v_2 + \ldots + (\lambda_n - \mu_n) \cdot v_n = 0$, y la independencia lineal de los vectores obliga a que todos los coeficientes $(\lambda_k - \mu_k)$ sean 0, lo que establece la unicidad de la expresión.

Nota.- Existen los coeficientes porque B es un sg. Son únicos porque es libre.

Los escalares $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ tales que $v = \lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \ldots + \lambda_n \cdot v_n$ (unívocamente determinados por el vector v y la base B) se llaman ***coordenadas*** *del vector en esa base.*

Ejemplo: En el espacio vectorial $\mathbf{R}_2[X]$, el polinomio $x^2 + x + 5$ tiene las coordenadas $3, 1, 1$ en la base $\{1, 1+x, 1+x^2\}$, porque es igual a $3 \cdot 1 + 1 \cdot (1+x) + 1 \cdot (1+x^2)$. En la base $\{1, x, x^2\}$, las coordenadas del mismo vector son $5, 1, 1$.

Nota.- En rigor, habría que especificar el orden en que van colocados los vectores en la base, para evitar ambigüedad en las coordenadas. En el ejemplo anterior, si escribimos la base última en el orden $\{x, 1, x^2\}$, las coordenadas del mismo polinomio serían $1, 5, 1$. Sin embargo, los conjuntos $\{x, 1, x^2\}$ y $\{1, x, x^2\}$ son el mismo. Habría que pensar en las bases como conjuntos con un orden para ahuyentar la confusión. Esta precisión es a menudo olvidada, pero nosotros siempre tendremos cuidado con el orden en que escribimos los vectores de una base.

Una base de V es como un panel de control con el que conseguimos manejar todo el espacio usando sólo unos pocos elementos: la clave de su sencillez.

Observación.- Si la dimensión del espacio es n y tenemos un sg con n elementos, entonces ya tenemos una base (no necesitamos comprobar la independencia lineal, está garantizada al ser la cantidad justa). Por una razón similar, n vectores linealmente independientes forman una base (al ser el número adecuado, es fijo que forman un sg).

Ante una afirmación como la del párrafo anterior, el alumno puede encogerse de hombros y no prestarle atención, o dedicar unos minutos a pensar en ella y buscar una explicación o una demostración. Si no consigue dar con ella, le recomiendo que consulte algún libro o que pregunte al profesor, que para eso está (entre otras cosas).

Cambio de base. Matriz de paso

Es frecuente manejar diferentes bases de un mismo espacio y cambiar las expresiones de una a otra. Al fin y al cabo, un ev tiene muchas bases y elegiremos trabajar con una u otra según se adapten mejor o peor al problema que queramos resolver en cada caso (por ejemplo, si queremos estudiar una elipse, es natural elegir un sistema de referencia que siga los ejes de la elipse). Nos gustaría poder cambiar de una base a otra con rapidez y sin tropiezos. ¿Cómo podemos conocer las coordenadas de un vector en una base si las conocemos en otra? ¿Hay algún procedimiento sencillo y eficaz para hacerlo? Un ejemplo aclarará la situación:

Pensemos en dos bases de $\mathbf{R}^2$, pongamos B $= \{(2,1), (3,2)\}$ y C $= \{(1,1), (2,1)\}$, y en un vector v del cual conocemos las coordenadas en la base C, digamos que son $-1, 1$ (en ese caso,

v sería el vector $-1 \cdot (1,1) + 1 \cdot (2,1) = (1,0)$). Queremos conocer las coordenadas de v en la base B, ¿cómo podemos hacerlo?¿cómo pasamos de las coordenadas de un vector en la base C a sus coordenadas en la base B?

Para facilitar la escritura y seguir el cálculo sin perdernos, vamos a escribir v_C para referirnos al vector columna que contiene las coordenadas de v en la base C. Nuestra tarea será entonces calcular v_B a partir de v_C. Para ello, empezamos calculando las coordenadas de los vectores de C en la base B: las del primer vector son $-1, 1$ (puesto que $(1,1) = -1 \cdot (2,1) + 1 \cdot (3,2)$), y las del segundo son $1, 0$. A continuación, nos fabricamos una matriz colocando en la primera columnas las coordenadas $-1, 1$ del primer vector, y en la segunda columna, las del segundo vector. Esa matriz, P, es la matriz de cambio de base (o matriz de paso) de C a B. Para recordarlo, escribiremos $P = (B : C)$.

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Multiplicamos esa matriz por la matriz columna v_C y ¡ale hop! el resultado es la columna $v_B : (B : C).v_C = v_B$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Comprobamos: $2 \cdot (2,1) + (-1) \cdot (3,2) = (1,0) = v$

¿Casualidad? Si las coordenadas de v en C hubieran sido a, b (de suerte que v sería el vector $a \cdot (1,1) + b \cdot (2,1) = (a+2b, a+b)$), entonces el producto de P por la columna de esas coordenadas sería

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a+b \\ a \end{pmatrix}$$

que son las coordenadas de v en B, puesto que $(-a+b) \cdot (2,1) + a \cdot (3,2) = ((a+2b, a+b) = v$.

¿Y eso funciona siempre? ¿En cualquier espacio y con cualquier par de bases? Pues sí, funciona. Si se quiere comprobar en uno de dimensión 2, piénsese en dos bases, $B = \{v_1, v_2\}$, $C = \{u_1, u_2\}$ y un vector v cuyas coordenadas en la última base sean a, b (así que $v = a \cdot u_1 + b \cdot u_2$); escribimos los vectores de C en función de los de B para hallar sus coordenadas: $u_1 = p_{11} \cdot v_1 + p_{21} \cdot v_2$, $u_2 = p_{12} \cdot v_1 + p_{22} \cdot v_2$, de modo que

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$$

es la matriz de paso de C a B, y al multiplicarla por la columna de las coordenadas a, b nos da

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11}a + p_{12}b \\ p_{21}a + p_{22}b \end{pmatrix}$$

que son las coordenadas de v en B, como se comprueba fácilmente: $(a \cdot p_{11} + b \cdot p_{12}) \cdot v_1 + (a \cdot p_{21} + b \cdot p_{22}) \cdot v_2 = a \cdot (p_{11} \cdot v_1 + p_{21} \cdot v_2) + b \cdot (p_{12} \cdot v_1 + p_{22} \cdot v_2) = a \cdot u_1 + b \cdot u_2 = v$

En dimensión $n > 2$, la demostración es la misma, con puntos suspensivos y subíndices j, k en lugar de $1, 2$, que no hacen sino oscurecer el argumento para quienes no tengan hábito en el manejo de ese lenguaje.

Si hay tres bases del espacio, B,C,D y las respectivas matrices de paso de unas a otras son $P = (B : C)$, $Q = (C : D)$ y $R = (B : D)$, al multiplicar por la matriz Q transformamos las coordenadas de un vector en la base D a la base C; si multiplicamos a continuación por P, las transformamos de C a B. Así pues, al realizar el producto $P \cdot Q \cdot v_D$ convertimos las coordenadas en D en coordenadas en B. Eso mismo es lo que hace el producto $R \cdot v_D$. Por tanto, el producto de las matrices $P \cdot Q$ es igual a la matriz R.

Regla mnemotécnica.- $(B : C) \cdot (C : D) = (B : D)$.

Si la base D es la misma que B, entonces la matriz $R = (B : D) = (B : B) = I$ es la matriz identidad, y resulta $(B : C) \cdot (C : B) = I$, y también $(C : B) \cdot (B : C) = I$, lo que muestra que la matriz de paso de C a B es inversible (y su inversa es la matriz de paso de B a C, como era de esperar).

Ejemplo: En el espacio $\mathbf{R}_1[X]$ consideramos las bases B $= \{1, x\}$ (base canónica), C $= \{3 + 2x, 2 + x\}$ y D $= \{2 + 3x, 3 + 4x\}$. Las matrices de paso se calculan fácilmente:

$$(B : C) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, (C : D) = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -5 & -6 \end{pmatrix}, (C : B) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Multiplicando, se comprueba que

$$(B : C) \cdot (C : D) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

que es la matriz de paso de D a B, (B:D).

Asimismo se verifica que $(B : C) \cdot (C : B)$ es la matriz identidad, lo que muestra que esas dos matrices son inversa una de la otra.

Ejercicio: En el espacio $\mathbf{R}^2$ consideramos las bases B $= \{(3, 4), (4, 5)\}$, C $= \{(2, 5), (3, 7)\}$ y los vectores $u = (1, 2), v = (-1, 1), w = (0, 3)$. Calcule las coordenadas de esos vectores en las bases dadas, así como las matrices de paso entre ellas. (Sugerencia: calcule también las matrices de paso de la base canónica a las bases B y C).

Ejercicio: En el espacio $\mathbf{R}^3$ consideramos la base B $= \{(1, 1, 2), (1, 2, 3), (1, 3, 5)\}$ y los vectores $u = (3, 1, 0), v = (2, 0, -1), w = (2, 2, 3)$. Calcule las coordenadas de esos vectores en la base B, así como la matriz de paso de la base canónica a la base B.

Ejercicio: En el espacio $\mathbf{R}_2[X]$ consideramos los polinomios $1 + 2x + 3x^2, 2x + x^2, 3x + 2x^2$. Compruebe que forman una base del espacio vectorial y calcule las coordenadas del polinomio $3 + x^2$ en esa base, así como la matriz de paso de la base canónica a esa base.

Subespacios vectoriales

Si V es un espacio vectorial, un subespacio vectorial de V es un subconjunto suyo que sea a su vez espacio vectorial (con las operaciones que hereda de V). No todos los subconjuntos de un espacio vectorial son subespacios: han de cumplir unos ciertos requisitos; afortunadamente, son muy sencillos de describir y de comprobar.

Teorema.- Si U es un subconjunto no vacío de V, una condición necesaria y suficiente para que U sea subespacio vectorial es que sea cerrado para las operaciones de V, es decir, que se cumplan estas dos condiciones:

La suma de dos elementos cualesquiera de U está en U.

El producto escalar de un vector cualquiera de U por un escalar siempre está en U.

La demostración de este teorema es muy sencilla, y no nos vamos a detener en ella: basta pensar que las 8 condiciones que se requieren para ser espacio vectorial se cumplen casi automáticamente en U por cumplirse en V; sólo hay dos que pueden plantear una pequeña dificultad: la existencia de neutro y de inverso en U, que se solventan considerando los vectores $0.u$ y $(-1).u$.

Las dos condiciones anteriores pueden fundirse en una: todas las combinaciones lineales de vectores de U están en U.

Ejemplos.- El plano de ecuación $x - y + 2z = 0$ es un subespacio vectorial del espacio $\mathbf{R}^3$, mientras que el plano de ecuación $x-y+2z = 3$ no lo es. El conjunto $\mathbf{R}_1[X]$ de los polinomios de grado menor que 2 es un subespacio de $\mathbf{R}[X]$. Las sucesiones convergentes forman un subespacio del espacio vectorial de todas las sucesiones (porque la suma de dos sucesiones convergentes es otra sucesión convergente y cualquier múltiplo de una sucesión convergente es convergente a su vez). Las funciones continuas en la recta real forman un subespacio del espacio de todas las funciones definidas en $\mathbf{R}$, y las derivables forman otro subespacio.

Ejercicio.- Demuestre que si U es un subespacio vectorial de V, entonces el vector nulo de V está en U.

Observación.- Si U, W son subespacios vectoriales de V y $U \subset W$, entonces se da la igualdad $U = W$ si y solamente si sus dimensiones coinciden. No es difícil comprobarlo, pero vale la pena dedicarle un minuto de reflexión: desde luego, es obvio que si U y W coinciden sus dimensiones son iguales (puesto que una base de U lo es de W); por otra parte, si U es más pequeño que W, una base de U no puede ser sistema generador de W (puesto que hay vectores en W que no están en U), y podrá ampliarse a una base de este espacio, que tendrá algún elemento nuevo, lo que prueba que $dim(W) > dim(U)$.

La observación es simple, pero de gran utilidad: para ver que dos subespacios coinciden basta ver que tienen la misma dimensión si uno de los subespacios está contenido en el otro (naturalmente, si no se da la circunstancia última, no podemos concluir nada de la igualdad de las dimensiones: dos rectas que pasen por el origen tienen dimensión 1 y no son el mismo subespacio).

Ecuaciones paramétricas e implícitas de subespacios.- ¿Cómo manejamos subespacios vectoriales en la práctica? Por lo común, estamos en un “espacio ambiente”, que a nivel elemental puede ser $\mathbf{R}^n$, y manejamos subespacios suyos que identificamos por medio de unas ecuaciones. Veamos cómo.

En primer lugar, puede presentársenos el subespacio por medio de un sistema de generadores. Así, si hablamos del subespacio generado por los vectores $u = (1, 2, 1)$ y $v = (2, 0, -1)$ en $\mathbf{R}^3$, sus elementos son los vectores de la forma $w = \lambda \cdot u + \mu \cdot v = \lambda \cdot (1, 2, 1) + \mu \cdot (2, 0, -1)$; si usamos las letras x, y, z para designar las componentes del vector w, eso se escribe en la forma:

$$\begin{cases} x = \lambda + 2\mu, \\ y = 2\lambda, \\ z = \lambda - \mu \end{cases}$$

Esas ecuaciones se conocen como *ecuaciones paramétricas del subespacio* (los números λ, μ, que pueden adoptar cualquier valor real, se conocen como *parámetros*). En lugar de x, y, z, otra notación frecuente es x^1, x^2, x^3, donde los números $1, 2, 3$ aparecen como superíndices, y no como exponentes (no se trata de "x al cuadrado" ni de "x al cubo").

Si eliminamos los parámetros (es decir, si imponemos que ese sistema de ecuaciones, en el que vemos a λ y μ como incógnitas, tenga solución), obtenemos unas ecuaciones en x, y, z (en este caso concreto, una sola; en otros, pueden ser más) que se conocen como *ecuaciones implícitas del subespacio*. El ejemplo que nos ocupa nos da la ecuación: $2x - 3y + 4z = 0$

Intersección y suma de subespacios. Suma directa

A partir de unos espacios vectoriales podemos obtener otros mediante operaciones conjuntistas. Así, si tenemos dos subespacios U, V de un espacio vectorial, su intersección $U \bigcap V$ es otro subespacio vectorial: para demostrar que eso es así, basta comprobar que tomando dos vectores cualesquiera en $U \bigcap V$ sus combinaciones lineales también están ahí (lo que es consecuencia de que U y V son subespacios). En realidad, la intersección de cualquier colección de subespacios, finita o infinita, es un subespacio.

En cambio, la unión de dos subespacios puede no ser un subespacio. Para convencernos de ello, basta con pensar en dos rectas de $\mathbf{R}^2$ que pasen por el origen, por ejemplo los ejes de abscisas y ordenadas: son dos subespacios de $\mathbf{R}^2$ cuya unión no lo es, pues la suma de los vectores $(0, 1)$ y $(1, 0)$ da el vector $(1, 1)$ que no está sobre los ejes.

Nota.- Adviértase que un solo caso sirve para demostrar que una propiedad general no se cumple (aquí: *la unión de subespacios es un subespacio* es la propiedad fallida), mientras que se requiere un argumento general para establecer que sí se da una propiedad (antes, *la intersección de subespacios es un subespacio*).

El hueco que deja la unión viene a ocuparlo una nueva construcción llamada *suma de subespacios*: dados dos subespacios U, V de un espacio vectorial, su suma $U + V$ es el conjunto formado por los vectores que se expresan como suma de un vector de U y uno de V $U + V = \{w : \exists u \epsilon U, \exists v \epsilon V, w = u + v\}$. Es fácil ver que $U + V$ es un subespacio vectorial. De manera semejante se define la suma de tres o más subespacios.

Cuando los subespacios U y V no se cortan (quiero decir, cuando su intersección se reduce al espacio nulo), decimos que su suma es una **suma directa**, y lo escribimos así: $U \bigoplus V$.

Ejercicio.- Si S es un subconjunto cualquiera de un ev V, el conjunto L(S) de todas las combinaciones lineales de vectores de S (que hemos llamado subespacio generado por S) es igual a la intersección de todos los subespacios de V que contienen a S.

Ejercicio.- La suma de dos subespacios es el subespacio engendrado por la unión, es decir, es la intersección de todos los subespacios que contienen a ambos.

Ejercicio.- Cada vector de una suma directa $U \bigoplus V$ se escribe como suma de un vector de U más uno de V de una sola manera. Si la suma no es directa, hay muchas formas de escribir un vector de $U + V$ como suma de un vector de U con uno de V.

<u>Teorema</u>.- Si la suma de los subespacios U y V es directa, entonces dim($U \bigoplus V$) = dim(U) + dim(V); si no es así, entonces, dim($U + V$) = dim(U) + dim(V) - dim($U \bigcap V$).

<u>Demostración</u>: En el caso de la suma directa, la unión de una base de U con una base de V nos da una base de $U \bigoplus V$. En el otro caso, empecemos con una base de $U \bigcap V$, digamos $\{w_1, \ldots, w_r\}$. Añadiendo unos vectores $u_1, \ldots, u_n$ obtenemos una base de U: $\{w_1, \ldots, w_r, u_1, \ldots, u_n\}$. Añadiendo otros vectores $v_1, \ldots, v_m$ obtenemos una base de V: $\{w_1, \ldots, w_r, v_1, \ldots, v_m\}$. Con todos ellos tenemos $\{w_1, \ldots, w_r, u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_m\}$, que es una base de $U + V$. Así pues, las dimensiones son: dim($U + V$) = $r + n + m$, dim(U) = $r + n$, dim(V) = $r + m$, dim($U \bigcap V$) = r, confirmando la fórmula. El alumno deberá completar los detalles.

Producto cartesiano de espacios vectoriales.- Si U y V son dos espacios vectoriales, entonces el producto cartesiano $U \times V$ (cuyos elementos son los pares ordenados (u,v) donde el primer elemento está en U y el segundo en V) también es un espacio vectorial: las operaciones se definen "componente a componente", $(u_1, v_1) + (u_2, v_2) = (u_1 + u_2, v_1 + v_2)$, $\lambda \cdot (u, v) = (\lambda \cdot u, \lambda \cdot v)$. Si los dos espacios U y V son de dimensión finita, entonces $U \times V$ también lo es: su dimensión es la suma de las dimensiones de los factores; para comprobarlo, se cogen bases en U y V, $\{u_1, \ldots, u_n\}$ y $\{v_1, \ldots, v_m\}$, y se forma la base de $U \times V$: $\{(u_j, 0), (0, v_k) : 1 \leqslant j \leqslant n, 1 \leqslant k \leqslant m\}$.

Nota sobre la suma y la intersección.- Las ecuaciones paramétricas vienen muy bien cuando queremos estudiar sumas de subespacios: yuxtaponiendo las ecuaciones paramétricas de los subespacios que se suman obtenemos las del espacio suma. La intersección de subespacios se estudia mejor con las ecuaciones implícitas: añadiendo las ecuaciones implícitas de U a las de V obtenemos las de $U \bigcap V$. Las razones de que eso sea así son claras: la unión de un sistema generador de U con uno de V es un sistema generador de $U + V$; por otra parte, para satisfacer a las condiciones para pertenecer a $U \bigcap V$ hay que satisfacer tanto a las del primero como a las del segundo. Convendrá, pues, manejar con soltura ambos tipos de ecuaciones y pasar ágilmente de uno a otro para abordar cuestiones relativas a sumas e intersecciones de subespacios.

Apéndice: definición de espacio vectorial.- Un espacio vectorial es un conjunto, V, a cuyos elementos llamamos "vectores", con dos leyes de composición (u operaciones): una interna y otra externa, es decir, una aplicación $V \times V \to V$ (que a cada par de vectores (u, v) le asocia otro vector al que llamamos suma de esos dos y denotamos como $u + v$) y otra una aplicación

$\mathbf{R} \times V \to V$ (que a cada par escalar-vector (λ, v) le asocia otro vector al que llamamos producto del escalar λ por el vector v y denotamos como $\lambda \cdot v$). Para que el conjunto V con esas dos operaciones reciba el honroso nombre de espacio vectorial se han de cumplir 8 condiciones (que vienen a garantizar que las operaciones se comportan como cabe esperar):

V1.- $u + v = v + u$ cualesquiera que sean los vectores u y v.

V2.- $u + (v + w) = (u + v) + w$ cualesquiera que sean los vectores u, v y w.

V3.- Existe un vector, al que denotamos por 0 y llamamos *vector nulo*, tal que $u + 0 = u$ cualquiera que sea el vector u.

V4.- dado cualquier vector, u, existe otro vector, v, tal que $u+v = 0$. Ese vector se denomina *opuesto* de u y se escribe $-u$.

Observación.- Antes de seguir con las condiciones que definen a un espacio vectorial, conviene decir que las 4 enunciadas se resumen diciendo que V es un *grupo abeliano* con la suma. Es fácil demostrar (pero no lo haré) que sólo hay un vector que cumpla la condición de $V3$ (lo que permite darle el título exclusivo de *vector nulo* y escribirlo como 0) y que para cada vector solamente hay uno que satisfaga la condición $V4$ (por lo que podemos hablar de "el vector opuesto" y no de "un vector opuesto", y podemos escribirlo como $-u$ sin ambigüedad).

Seguimos con las lista de condiciones: ahora las que hacen referencia al producto por escalares:

V5.- $\lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$ cualesquiera que sean el escalar λ y los vectores u y v.

V6.- $(\lambda + \mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u$ cualesquiera que sean los escalares λ y μ y el vector u.

V7.- $(\lambda \cdot \mu) \cdot u = \lambda \cdot (\mu \cdot u)$ cualesquiera que sean los escalares λ y μ y el vector u.

V8.- $1 \cdot u = u$ cualquiera que sea el vector u.

Observación.- La definición anterior puede modificarse ligeramente sustituyendo los números reales por los complejos, lo que daría lugar al concepto de "espacio vectorial complejo". También podrían ocupar ese lugar los números racionales o algunos de otro tipo. Yo he elegido los espacios vectoriales reales porque tienen dos virtudes: son los más usuales (al menos, en este nivel de estudios) y los alumnos tienen familiaridad con los números reales; por lo demás, el paso a espacios vectoriales sobre otro cuerpo de escalares resulta trivial.

Ejercicios.-