ESCUELA DE INGENIEROS
DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS
Departamento de Matemáticas e Informática
Aplicadas a la Ingeniería Civil

ESTADÍSTICA

Repaso de integrales eulerianas

1. FUNCIÓN GAMMA DE EULER

1.1. Definición

Se define como función gamma dependiente del parámetro "p" a:

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty e^{-x} x^{p-1} dx$$

Esta integral solamente converge para p > 0.

1.2. Propiedades

Las propiedades de esta función son las siguientes:

- Para p > 0 la función gamma converge
- Para p > 1 se cumple $\Gamma(p) = (p-1)\Gamma(p-1)$
- Para p=1 se tiene que $\Gamma(1) = 1$
- Si p es un número entero no negativo se cumple que $\Gamma(p) = (p-1)!$
- Sea p > 0 y consideremos los valores (p-1), (p-2), ..., (p-k), cumpliéndose además que 0<(p-k)≤1. Entonces $\Gamma(p) = (p-1)(p-2)\cdots(p-k)\Gamma(p-k)$
- Si n es un número entero positivo se cumple que $\Gamma\left(\frac{1}{n}\right) = n\int_0^\infty e^{-x^n} dx$
- Para p=1/2 se cumple que: $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

2. FUNCIÓN BETA DE EULER

2.1. DEFINICIÓN

La función beta depende de dos parámetros "p" y "q" y se define de la manera siguiente:

$$\beta(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$$

2.2. PROPIEDADES

La función beta tiene las propiedades siguientes:

- Es simétrica respecto a sus dos parámetros $\beta(p,q) = \beta(q,p)$
- Para p > 0 y q > 0 se verifica: $\beta(p,1) = \dfrac{1}{p}$ $\qquad \beta(1,q) = \dfrac{1}{q}$
- Para p > 0 y q > 0 se verifica: $\beta(p,q) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (senx)^{2p-1}(\cos x)^{2q-1}\,dx$

3. RELACIÓN ENTRE LAS FUNCIONES GAMMA Y BETA DE EULER

Las funciones eulerianas están relacionadas a través de la expresión siguiente:

$$\beta(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

Si, además, p y q son dos números enteros positivos (y de acuerdo con una de las propiedades ya indicadas de la función Gamma) se cumple:

$$\beta(p,q) = \frac{(p-1)!(q-1)!}{(p+q-1)!}$$

Madrid, 23 de diciembre de 2009