ETS INGENIEROS DE CAMINOS CANALES Y PUERTOS DE MADRID
CURSO 2012-13. PRIMER CUATRIMESTRE. PRÁCTICAS DE ESTADÍSTICA
CAPÍTULO 10. SUCESIONES Y PROCESOS DE VARIABLES ALEATORIAS NO INDEPENDIENTES

Ejercicio 10-1 (Curso 1998-99. Junio)
El parque de material móvil del Ministerio de Fomento está clasificado en función del grado de conservación de los vehículos:

- Grado 1. Vehículo en perfecto estado
- Grado 2. Vehículo algo deteriorado pero solo superficialmente
- Grado 3. Vehículo deteriorado pero servible
- Grado 4. Vehículo inservible

A finales de 2002, la clasificación del parque era la siguiente:

- Grado 1. 40% del parque
- Grado 2. 20% del parque
- Grado 3. 15% del parque
- Grado 4. 25% del parque

Llamando calidad media del parque al cociente entre los grados 1 + 2 y 3 + 4 se obtiene a finales de 2002 una calidad media de 1,5 que se considera insuficiente.

Para reparar los vehículos con grado 2 es suficiente una operación de taller que los repone al grado 1 con un coste de 1.800 euros/vehículo. Una reparación de vehículos en grado 3 para pasarlos al grado 1 tiene un coste de 5.000 euros/vehículo. Finalmente, sustituir los vehículos de grado 4 por otros nuevos representa un coste de 12.000 euros/vehículo.

El paso del tiempo y el funcionamiento de los vehículos los van deteriorando de forma que al cabo de un año puede asegurarse que el 12% de los vehículos que a primeros de año estaban en grado 1 decae al grado 2, que el 18% de los que estaban en grado 2 decae al grado 3 y que el 36% de los que estaban en grado 3 decaen al grado 4.

El responsable del parque ha puesto en marcha un plan de conservación que consiste en:

- Reparar el 26% de los vehículos que a primeros de año estén en grado 2 y pasarlos al grado 1
- Reparar el 18% de los vehículos que a primeros de año estén en grado 3 y pasarlos al grado 1

- Invertir en el 12% de los vehículos en grado 4 para sustituirlos por vehículos nuevos de grado 1

Calcular el coste medio por vehículo del plan de conservación durante el primer año. Calcular el coste medio límite, cuando se alcance al cabo de los años la situación estacionaria de la cadena markoviana definida. Calcular la calidad media del parque en la situación estacionaria.

(Se supone que se cumplen todos los requisitos de homogeneidad y aleatoriedad para considerar que la distribución de estados del pavimento es una cadena markoviana de paso un año).

Ejercicio 10-2 (Curso 2006-07. Primer parcial)
Sea una vivienda con cuatro estancias, vestíbulo, salón, cocina y dormitorio, dispuestas de tal manera que desde el vestíbulo se puede acceder al salón y a la cocina; desde el salón al vestíbulo, a la cocina y al dormitorio; desde la cocina al vestíbulo, al salón y al dormitorio; desde el dormitorio al salón y a la cocina.

El ratón cambia de estancia cada segundo y se dirige a una de las posibles en cada caso con igual probabilidad.

Suponiendo que el ratón está inicialmente en la cocina:

1. ¿Cuál es la probabilidad de que esté en cada estancia al cabo de 3 movimientos? ¿Y al cabo de 6 movimientos? ¿Y al cabo de 10 movimientos? (2 puntos)
2. ¿Existe una situación estacionaria? En su caso, ¿cuál es? (2 puntos)
3. Al cabo de una semana, ¿qué tiempo habrá permanecido el ratón en cada estancia? (1 punto)
4. ¿Cuáles serían estos tiempos si el ratón hubiera estado inicialmente en la entrada? (1 punto)

Partiendo de que el ratón está inicialmente en el dormitorio y suponiendo que en la cocina hay un veneno que mata al ratón y que en la entrada existe una puerta que da a la calle por donde el ratón escapa:

5. ¿Cuál es la matriz de transición? (2 puntos)
6. ¿Existe una situación estacionaria? (1 punto)
7. En su caso, ¿cuál es? (1 punto)

Ejercicio 10-3 (Curso 2006-07. Primer parcial)
Un borracho camina por un pasillo que tiene un ancho de cinco baldosas; da un paso cada segundo, pero no puede mantener la línea recta y se va a la izquierda o la derecha con la misma probabilidad. Cuando llega a una baldosa que está junto a la pared se choca contra ella y ello hace que en el siguiente paso vaya a la baldosa de al lado.

Suponiendo que inicialmente el borracho se encuentra en la baldosa del centro:

1. ¿Cuál es la probabilidad de que esté en cada baldosa al cabo de 3 movimientos? ¿Y al cabo de 6 movimientos? ¿Y al cabo de 10 movimientos? (2 puntos)
2. ¿Existe una situación estacionaria? En su caso, ¿cuál es? (2 puntos)
3. Al cabo de una semana, ¿qué tiempo habrá permanecido el borracho en cada baldosa? (1 punto)
4. ¿Cuáles serían estos tiempos si el borracho hubiera estado inicialmente en la baldosa a la derecha al lado de la baldosa central? (1 punto)

Partiendo de que el borracho está inicialmente junto a la pared de la izquierda y suponiendo que no hay ninguna pared a la derecha del pasillo y que cuando llega a ese extremo el borracho se sale del pasillo y cae a una zanja de que ya no sale:

5. ¿Cuál es la matriz de transición? (2 puntos)
6. ¿Existe una situación estacionaria? (1 punto)
7. En su caso, ¿cuál es? (1 punto)

Ejercicio 10-4 (Curso 2008-09. Primer parcial)

Indicar y justificar qué propiedades tiene la sucesión de variables aleatorias aleatorias $X_n = B(n, p)$.